

Tentamen Elektriska drivsystem och fält för Z2 (EEN155).

2022-06-08, 8:30-12:30.

Ansvariga lärare:

Emma Grunditz, ankn. 6010, besöker tentamen ca 09:30 och 11:00

Pär Strand, ankn. 1514, (Andrei Osipov, ankn. 5056) besöker tentamen ca 09:30 och 11:00

Examinator: Emma Grunditz

Tillåtna hjälpmedel:

(indexeringar och markeringar är tillåtna i Formelsamling samt tabellverk):

- Chalmersgodkänd räknare
- Tabellverk: Physics Handbook, Mathematics Handbook
- Formelsamling: endast den som bifogas denna tentamenstes

Betygsgränser: (av maximalt 50 poäng):

Betyg 3: 20 poäng

Betyg 4: 30 poäng

Betyg 5: 40 poäng

Granskning: Tid och plats anslås på Canvas.

Kom ihåg! Rita tydliga figurer med referensriktningar och beteckningar.

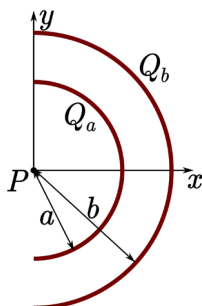
Glöm ej: enhet, dimensionskontroll, antaganden, motiveringar.

Om uppgifter saknas i problemtexten, gör då själv rimliga antaganden.

Uppgift 1 (5p)

Två halvcirklar med radie a respektive b , där $a < b$, med centrum i origo ligger i xy -planet enligt figuren. Halvcirkeln med radie a har en jämnt fördelad laddning Q_a medan halvcirkeln med radie b har en jämnt fördelad laddning Q_b . Observationspunkten P ligger i origo.

- Bestäm potentialen Φ_a vid punkten P från halvcirkeln med radien a : Välj ett lämpligt koordinatsystem, skriv ut källor och koordinatvektorer för källorna- och observationspunkterna. Formulera integralen för potentialen i termer av ovannämnda storheter och beräkna den.
- Upprepa stegen i (a) för halvcirkeln med radien b för att beräkna Φ_b .
- Beräkna den resulterande totala potentialen Φ i punkten P genom superposition. Vad ska förhållandet Q_a/Q_b vara för att potentialen i P ska vara noll?



Uppgift 2 (5p)

En kvadratisk trådslinga med sidan a ligger i xy -planet. Magnetfältet är

$$(1) \quad \vec{B} = \hat{z}B_0[\cos(\omega t) + 5] + \hat{x}B_0\sin(\omega t)$$

där B_0 är fältamplituden, ω är vinkelfrekvensen och t är tid.

- Bestäm flödet. Beskriv ytan (gränser och normalvektor) genom vilken flödet beräknas. Vilka komponenter i fältet bidrar till flödet? Vad skulle hända med flödet om trådslingan var i xz -planet istället?
- Från flödet, bestäm emk:n (den inducerade spänningen) i slingan. Vad händer med den tidsberoende komponenten?

Uppgift 3 (5p)

Två oändligt långa ihåliga ledande cylindrar ligger längs z -axeln, med z -axeln som centrum. Båda cylindrarna har försumbart tunna väggar. Den inre cylindern har en radie a och bär en konstant ström I i den positiva z -riktningen. Den yttre cylindern har radien b ($b > a$) och bär en konstant ström I i motsatt riktning mot strömmen på den inre cylindern. Bestäm den magnetiska flödestätheten $\vec{B}$ i hela rymden.

Uppgift 4 (11p)

En separatmagnetiserad likströmsmotor (enligt krets i formelsamlingen), matas med en styrbar spänningskälla. Motorns märkdata är $v_T=200$ V, $I_a = 12$ A, $v_f=200$ V, och dess parametrar är $R_a=1,5$ Ω , $L_a=1,5$ mH, $\lambda=1,5$ i_f Wb, $J=0,05$ kg m², $R_f=200$ Ω och $L_f=800$ mH. Motorn driver en fläkt med det lastande momentet $T_{L,fläkt}=b \omega_r = 0,1 \omega_r$ Nm.

- Maskinen driver fläkten med märkspänning i både ankar- och fältlindning. Beräkna:
 - vid vilket varvtal som maskinen driver fläkten
 - det utvecklade vridmomentet
 - utvecklad mekanisk effekt
 - inmatad effekt i ankarlindningen
 - förlusterna i ankarlindningen
 - mot-EMKn (e_a)(4p)
- I denna deluppgift behöver numeriska värden ej anges.
 - Skissa lastens moment-varvtalskaraktäristik.
 - Skissa maskinens moment-varvtalskaraktäristik, både vid märkdrift och då ankarspänningen är reducerad med ca. 10%.
 - Markera ut de arbetspunkter där maskinen driver fläkten vid de två matnings-spänningarna (från deluppgiften ovan)
 - För märkspänning, markera ut maskinens märk-moment, kipp-moment och tomgångsvarvtal.(4p)
- Beskriv hur man kan gå till väga för att mäta ankar-resistansen och ankar-induktansen för en separatmagnetiserad likströmsmaskin. Beskrivningen skall inkludera relevanta antaganden, kretsschema för mätuppkoppling med komponent- och parameterdefinitioner och nödvändiga beräkningsformler.

(3p)

Uppgift 5 (5p)

Elmaskinen i föregående uppgift skall ström- och varvtals-styras. Reglersystemet skall vara kaskadkopplat med en yttre varvtalsregleringsloop och en inre ström-/moment-regleringsloop. Varvtalsregulatorn skall ha en stigtid på 0,1 s. Den inre reglerloopen skall vara 10 gånger snabbare än den yttre.

- Rita ett fullständigt blockschema för likströmsmaskinen och ange vad för signaler som går mellan blocken (dvs. ge en fysikalisk tolkning av signalerna). (2p)
- Härled en lämplig ström-/momentregulator samt en varvtals-regulator och beräkna deras regler-parametrar. Glöm ej att ange relevanta antaganden. (3p)

Uppgift 6 (8p)

Ankarkretsen till likströmsmaskinen i uppgift 4 styrs av en omriktare. Omriktaren får sin spänning från en likriktad nätspänning i serie med ett filter. Tillsammans ger detta en stabil likspänning på 200 V som in-spänning till omriktaren. Omriktaren har en switch, en diod, en mycket stor kondensator och en induktans. Switchfrekvensen är 100 kHz.

- Vilken typ av omriktare är lämplig att välja för uppdraget, en BUCK eller en BOOST? Motivera ditt val. (1p)
- För den valda omriktaren i (a) uppgiften, härled och rita spänningen över och strömmen genom omriktarens induktans, för två switchperioder. Glöm ej att ange relevanta antaganden. (3p)
- Vid det lägsta varvtalet som likströmsmotorn skall driva fläkten på behöver likströmsmotorns ankarkrets 162 V och 3.5 A. Beräkna det minsta värdet på omriktarens induktans så att omriktaren alltid arbetar i CCM. (2p)
- Hur definieras stationärtillstånd för kraftelektronik? Vad innebär denna typ av stationärtillstånd för en kondensator i en kraftelektronisk omvandlare? (2p)

Uppgift 7 (8p)

En Y-kopplad 6-polig asynkronmaskin matas med märkspänning 400 V (RMS huvudspänning) och 50 Hz. Maskinen har följande parametrar:

$R_s=0.19 \Omega$, $X_s=0.62 \Omega$, $R_r=0.18 \Omega$, $X_r=0.23 \Omega$ och $X_m=13 \Omega$.

- Vid tomgång (olastad maskin) beräkna maskinens hastighet, fasström, effektfaktor och komplexa in-effekt. (4p)
- Beräkna maskinens startström (den högsta strömmen under starten) och startmoment. (3p)
- Vilket tecken har eftersläpningen vid generator-drift för asynkronmaskinen? Motivera ditt svar. (1p)

Uppgift 8 (3p)

En 8-polig 3-fas permanent magnetiserad synkron maskin (PMSM) har följande parametrar i en dq-modell: $R_s=8 \text{ m}\Omega$, $L_{sd}=230 \mu\text{H}$, $L_{sq}=420 \mu\text{H}$, $\Psi_m=104 \text{ mWb}$. Vid ett tillfälle arbetar motorn på varvtalet 3000 rpm, med en magnitud på stator-strömmen på 315 A och en strömvinkel på 120° . Beräkna: (3p)

- strömmarna i_{sd} och i_{sq}
- det utvecklade mekaniska vridmomentet, T_e
- den utvecklade mekaniska effekten, P_e

EEN155 Formelsamling

Differential Maxwell's Equations

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Integral Maxwell's Equations

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} & \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} & \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 I_{\text{enc}} + \epsilon_0 \mu_0 \oint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

where

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Induced voltage - electromotive force

$$\mathcal{V} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{stationary circuits})$$

Electrostatics

The Electric Field

Coulomb's Law:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} \hat{\mathbf{R}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

The Electric Field:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (\Phi \text{ electric potential})$$

Electric Field due to discrete point charges:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^2} \hat{\mathbf{R}}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

Electric Field due to a continuous charge distribution:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_V(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (\text{volume charge}) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_S(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \quad (\text{surface charge}) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\rho_L(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl' \quad (\text{line charge})\end{aligned}$$

Electric Potential

$$\Phi(b) - \Phi(a) = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Potential due to a localized charge distribution:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_V(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (\text{volume charge}) \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_S(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (\text{surface charge})\end{aligned}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\rho_L(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' \quad (\text{line charge})$$

Electric Potential

Work and Energy in Electrostatics

Energy stored in a point charge distribution: (Φ is potential)

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \Phi(\mathbf{r}_i)$$

Energy of a continuous charge distribution:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') dV'$$

Total energy of a continuous charge distribution:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{all space}} E^2(\mathbf{r}') dV'$$

Conductors

$\mathbf{E} = \mathbf{0}$ inside a conductor.

Electric Field immediately outside a conductor:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

Surface charge:

$$\rho_s = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

Capacitors:

$$\begin{aligned}Q &= C\Phi \\ W &= \frac{1}{2} C\Phi^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q\Phi\end{aligned}$$

Potentials

Laplace's Equation:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Electric Dipole

Dipole Moment:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV$$

Electric Dipole Potential (at origin):

$$\Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Electric Fields in Matter

Bound Charges:

$$\rho_s = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

The Electric Displacement:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{f,\text{enc}}$$

Linear Dielectrics

Polarization:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

Electric Displacement:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

Energy in a Dielectric System:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{all space}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$$

Magnetostatics

Lorentz Force Law:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Currents:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

Biot-Savart Law:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Magnetic Vector Potential

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{where} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Vector Potential Poisson's Equation:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Vector Potential when $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{0}$ at infinity:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Dipole momentum of a current loop:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Magnetic Dipole Moment for a vector area $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{m} = I \int d\mathbf{S} = I \mathbf{a}$$

Magnetic Fields in Matter

Bound Currents:

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad \mathbf{J}_s = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$$

Auxiliary Field:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f$$

Linear Media

Magnetization in linear media:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

Auxiliary Field:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$$

Volume bound current:

$$\mathbf{J}_b = \chi_m \mathbf{J}_f$$

Boundary Conditions

Tangential components:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (\mathbf{J}_s \text{ surface current})$$

Normal components:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \quad (\rho_s \text{ surface charge})$$

Vector Derivatives

Cartesian

$$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}, \quad dV = dx dy dz$$

Gradient:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Laplace:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Spherical

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Gradient:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Curl:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} +$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (rv_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplace:

$$\nabla^2 f =$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical

$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$

Gradient:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} +$$

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\phi) - \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

Laplace:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Fundamental Theorems

Fundamental Theorem of Line Integrals:

$$\int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$$

Divergence Theorem:

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

Stoke's Theorem:

$$\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Vector Identities

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) = 4\pi \delta^3(R)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R}$$

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x)$$

Spherical Coordinates

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\sqrt{x^2 + y^2} / z \right)$$

$$\phi = \tan^{-1}(y/x)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}$$

Cylindrical Coordinates

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$z = z$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \cos \phi \hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \sin \phi \hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}(y/x)$$

$$z = z$$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}$$

FORMELSAMLING

Elektriska drivsystem EEN155

©Eva Palmberg
Institutionen för Elektroteknik
Chalmers tekniska högskola

2022

Innehåll

1	Symbolsamling	2
1.1	Referenser	2
1.2	Aktiva kretselement	2
1.3	Passiva ideala element	2
1.4	Resistanslösa anslutningar	2
2	Formelsamling	4
2.1	Ström, spänning, effekt, energi, potential	4
2.2	Ohms lag, resistans, konduktans	4
2.3	Kirchhoffs lagar, spännings- och strömdelning	4
2.4	Mask- och nodanalys. Cramers regel	5
2.5	Ekvivalenta tvåpoler. Anpassning	5
2.6	Kapacitans och induktans	5
2.7	Transienter, tidskonstanter	6
2.8	Komplexa spänningar; impedans	6
2.9	Effekt, komplex effekt, effektivvärde, anpassning	6
2.10	Symmetriska trefassystem	7
2.11	Ideal transformator	8
2.12	Magnetfält. Inducerad spänning	8
2.13	Kraftelektronik, Spänningsomriktare, Likriktare	8
2.13.1	Ideal diod och transistor som brytare	8
2.13.2	Likriktare	9
2.13.3	Spänningsomriktare. Buck- resp. Boostomriktare	9
2.14	Maskiner	9
2.14.1	Likströmsmaskiner	9
2.14.2	Växelsströmsmaskiner, asynkronmaskin	10

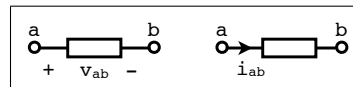
Kompletterande delar

- Relaterat till regelring
- Växelsströmsmaskin – 3-fas Permanentmagnetiserad synkronmaskin
- Effekt för stationär växelspanning – med RMS-värden
- Space vectors

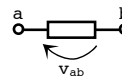
1 Symbolsamling

1.1 Referenser

Spänning v och ström i : $+v - ; \rightarrow i$



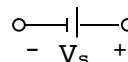
(Hambley använder ibland en pil med $+$ vid pilspetsen som referens för spänning.)



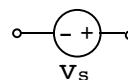
(Physics Handbook har en pil med $-$ vid pilspetsen som referens för spänning)

1.2 Aktiva ideala kretselement

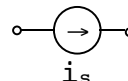
Likspänningskälla



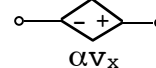
Oberoende spänningskälla



Oberoende strömkälla



Beroende spänningskälla



Beroende strömkälla



En beroende källa styrs av en spänning eller ström någonstans i kretsen, t.ex. en spänning v_x för figurerna ovan.

1.3 Passiva ideala element

Allmänt kretselement

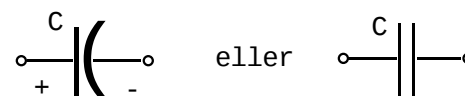


Kretselementen R, C och L:

Resistans



Kapacitans



Induktans

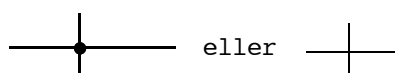


1.4 Resistanslösa ledningar och anslutningar

Anslutningspunkt



Kontaktpunkt



Korsning utan kontakt



Anslutning till jord



2 Formelsamling

2.1 Ström, spänning, effekt, energi, potential

Ström $i = dq/dt$ $q = \text{laddning}$

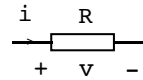
Spänning $v = dw/dq$ $w = \text{energi}$

Effekt $p = v \cdot i = dw/dt$

Spänning $v = v_A - v_B = \text{potentialskillnad};$ $v_A, v_B = \text{potential}$

2.2 Ohms lag, resistans, konduktans – linjära kretsar –

Ohms lag $\begin{cases} v = R i \\ i = G v \end{cases}$



Resistans R

Konduktans $G = 1/R$

Resistans för homogen rak ledare med längden L , tvärsnittsytan A och resistiviteten ρ :
 $R = \rho L / A$.

Effekt i resistans $p = Ri^2 = v^2/R$

2.3 Kirchhoffs lagar, spännings- och strömdelning

Kirchhoffs strömlag, KCL: $\sum_k i_k = 0$ i en nod;

Kirchhoffs spänningslag, KVL: $\sum_k v_k = 0$ i en slinga

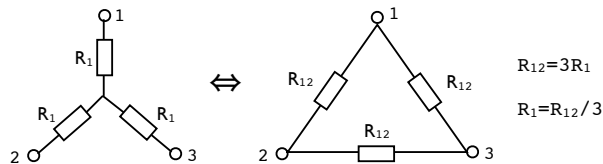
Seriekopplade resistanser: $R_s = \sum_n R_n$

Parallellkopplade resistanser: $G_p = \sum_n G_n$

eller med R : $\frac{1}{R_p} = \sum_n \frac{1}{R_n}$

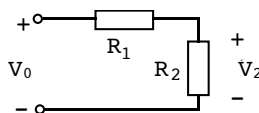
specialfall $n=2$: två parallella resistanser: $R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Stjärn-triangeltransformationen ($Y-\Delta$) och omvänt: specialfall: 3 lika resistanser



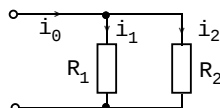
Spänningsdelning

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0$$



Strömdelning

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_0$$



2.4 Mask- och nodanalys. Cramers regel

Maskanalys: matrisekvation $\boxed{\mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{V}_s}$

$\mathbf{R}$ = maskresistansmatris, $\mathbf{i}$ = maskströmvektor, $\mathbf{V}_s$ = spänningskällevektor

Element i resistansmatrisen: $r_{11} = \sum R$ i maska 1; $r_{12} = r_{21} = -\sum R$ gemensamma för maska 1 och 2; o.s.v.

Nodanalys: matrisekvation $\boxed{\mathbf{G}\mathbf{V} = \mathbf{I}_s}$

$\mathbf{G}$ = nodkonduktansmatris, $\mathbf{V}$ = nodspänningsvektor, $\mathbf{I}_s$ = strömkällevektor

Element i konduktansmatrisen: $g_{11} = \sum G$ i grenar anslutna till nod 1;

$g_{12} = g_{21} = -\sum G$ anslutna direkt mellan nod 1 och nod 2; o.s.v.

Cramers regel – lösning av matrisekvation:

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$; med lösningen $x_k = \Delta_k / \Delta$,

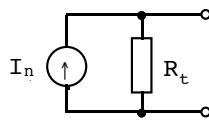
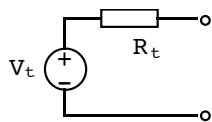
där Δ = determinanten av $\mathbf{A}$ och Δ_k = determinanten av $\mathbf{A}$ med kolumn k utbytt mot $\mathbf{b}$.

Determinant av 2x2-matris: $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3x3-matris:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

2.5 Ekvivalenta tvåpoler. Anpassning



$$R_t = V_t / I_n$$

Thévenins respektive Nortons ekvivalenta tvåpol

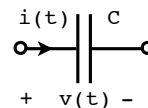
V_t = **tomgångsspänning**; I_n = **kortslutningsström**

Anpassning: $R_L = R_t$ (rent resistiva kretsar)

2.6 Kapacitans och induktans

Kapacitans C: ström-spänningsberoende $\boxed{i(t) = C dv/dt}$

lagrad **energi** $w_C = \frac{1}{2} C v^2(t)$

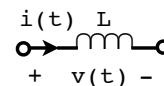


Parallell- resp. seriekopplade kapacitanser utan begynnelseenergi (= begynnelsepänningar):

$$C_p = \sum C_n; \quad \frac{1}{C_s} = \sum \frac{1}{C_n}$$

Induktans L: ström-spänningsberoende $\boxed{v(t) = L di/dt}$

lagrad **energi** $w_L = \frac{1}{2} L i^2(t)$



Parallell- resp. seriekopplade induktanser utan begynnelseenergi (=begynnelseströmmar):

$$\frac{1}{L_p} = \sum \frac{1}{L_n}; \quad L_s = \sum L_n$$

2.7 Transienter, tidskonstanter

Första ordningens kretsar med tidskonstanta källor

KVL, KCL leder till inhomogena differentialekvationer för v eller i av formen

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v(t) = \frac{V_0}{\tau} \quad \text{med } V_0 = \text{konst och } \tau = \text{en tidskonstant}$$

Ansätt lösningen $v(t) = k_1 + k_2 e^{-t/\tau}$

k_1 och k_2 är konstanter som bestäms ur diff.ekv. och begynnelsevillkor.

k_1 = partikulär lösning – **stationär lösning**

$k_2 e^{-t/\tau}$ = lösning till homogena diff.ekv. – **transient lösning**

Specialfall: RC-kretsen: $\tau = RC$;

RL-kretsen: $\tau = L/R$

2.8 Stationärtillstånd. Komplexa spänningar, strömmar, impedans

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) = \operatorname{Re}\{V e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{V_m e^{j(\omega t + \theta_v)}\}$$

där den komplexa spänningen $V = V_m e^{j\theta_v}$ komplexa toppvärden

$$\omega = 2\pi f; \quad \omega = \text{vinkelfrekvens, } f = \text{frekvens}$$

$$\text{impedans } Z = V/I = R + jX; \text{ admittans } Y = 1/Z = G + jB;$$

där R = resistans, X = reaktans, G = konduktans, B = susceptans

Speciellt för resistans R : $Z = R$

induktans L : $Z = j\omega L$

kapacitans C : $Z = 1/j\omega C$

OBS! Formlerna i avsnitt 2.3, 2.4, 2.5 gäller för motsvarande komplexa storheter V, I, Z, Y .

$c = a + jb$ rektangulär form; $c^* = a - jb$ komplexkonjugerat;

$c = |c| e^{j\theta} = |c| \angle \theta$ polär form; $j = \sqrt{-1}$

där beloppet $|c| = \sqrt{cc^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$ och vinkeln $\theta = \arctan(b/a)$

2.9 Effekt, komplex effekt, effektivvärde, anpassning

Ögonblicksvärde (momentanvärde) av effekt $p(t) = v(t)i(t)$

medeleffekt, aktiv effekt $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$; T = periodtiden

speciellt för sinusformad växelström $P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$

där θ_v = spänningens fasvinkel, θ_i = strömmens fasvinkel

$$\text{Komplex effekt } S = P + jQ = \frac{1}{2} VI^* = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + j \frac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i)$$

där P = aktiv effekt och Q = reaktiv effekt; $*$ = komplexkonjugat

Skenbar effekt $|S| = \frac{1}{2} V_m I_m$

effektfaktor $\cos(\theta_v - \theta_i)$

induktiv last $\theta_v - \theta_i > 0$; (lagging i Hambley)

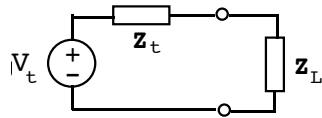
kapacitiv last $\theta_v - \theta_i < 0$; (leading i Hambley)

Effektivvärde, (rms)

$$I_{\text{eff}} = I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i(t)]^2 dt} \quad (\text{rms} = \text{root mean square})$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m \quad \text{för sinusformad växelström}$$

Anpassning



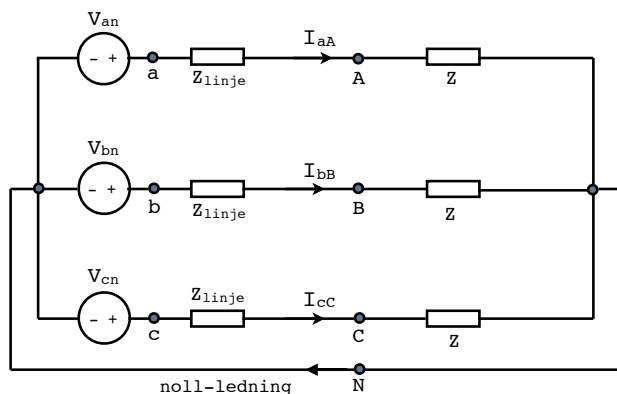
Maximal effekt P_L i belastningen Z_L för

- 1/ $Z_L = Z_t^*$ om $Z_L = R_L + jX_L$ kan väljas fritt; $*$ = komplexkonjugat
- 2/ $Z_L = R_L = |Z_t|$ om enbart $|Z_L|$ kan varieras

Andra fall av anpassning: Teckna P_L och kolla villkoren för $P_{L\text{max}}$!

2.10 Symmetriska trefassystem

(Generatorspänningarna symmetriska, faserna impedansmässigt lika)
Y-kopplade generatorer V_{an} , V_{bn} och V_{cn} och laster Z i figuren nedan.



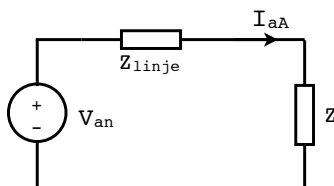
Symmetrisk trefasspänning - positiv fasföljd abc, komplexa toppvärden:

$$V_{an} = V e^{j0^\circ}; \quad V_{bn} = V e^{-j120^\circ}; \quad V_{cn} = V e^{j120^\circ}; \quad \text{fasspänningar}$$

$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn} = V\sqrt{3} e^{j30^\circ}; \quad V_{bc} = \dots; \quad V_{ca} = \dots; \quad \text{huvudspänningar}$$

$$I_{aA}, I_{bB}, I_{cC}; \quad \text{linjeströmmar}$$

Ekvivalent enfaskrets till kretsen ovan:

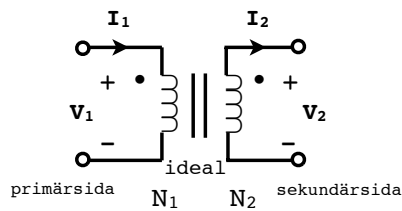


Effekt till de tre belastningarna Z :

$$P = 3 \frac{1}{2} \text{Re}\{Z\} |I_{aA}|^2$$

Transformer av Deltakopplad last till ekvivalent Y: se stjärn-triangeltransformationen för resistanser, avsnitt 2.3!

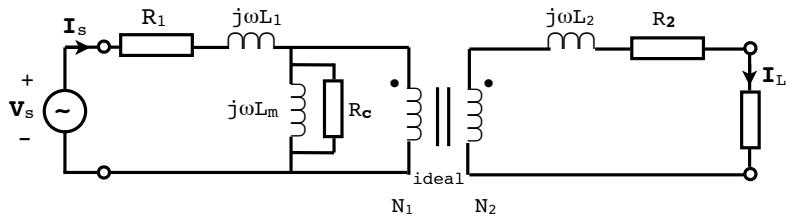
2.11 Ideal transformator resp. mer realistisk modell



$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}; \quad N_1 I_1 - N_2 I_2 = 0; \quad (\text{ideal transformator})$$

omsättningstal $n = N_1/N_2$ (definieras ibland som N_2/N_1)

impedanstransformering till primärsidan $Z'_L = (N_1/N_2)^2 Z_L$ (ideal transformator)



2.12 Magnetfält. Inducerad spänning

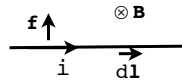
Magnetfält B på avståndet r från lång rak **strömförande ledare** med strömmen I:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r};$$



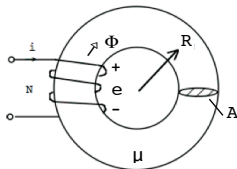
Kraft f på **strömförande ledare**, med strömmen i och längden ℓ i ett (yttre) magnetfält B:

$$\mathbf{f} = \int i d\mathbf{l} \times \mathbf{B};$$



Speciellt för
homogent $B \perp i$
: $f = Bi\ell$

B i **toroid** med kärna av magnetiskt material (μ), medelradie R, tvärsnittsytta A, lindad med N st varv med ström i:



$$B = \mu Ni / 2\pi R; \quad \phi \approx BA;$$

Inducerad spänning i lindningen: $e = Nd\phi/dt$;

$$\text{Reluktans } \mathcal{R} = \ell / \mu A = 2\pi R / \mu A;$$

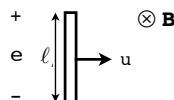
$$\Rightarrow \phi = Ni / \mathcal{R}$$

$$\text{Induktans } L = N\phi / i = N^2 / \mathcal{R}$$

Rak **ledare** med längden ℓ rör sig **med hastigheten u** vinkelrätt mot ett magnetfält B:

Inducerad spänning i ledaren

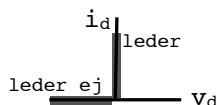
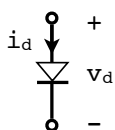
$$e = B\ell u;$$



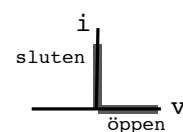
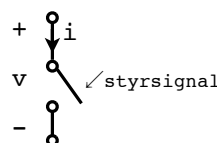
2.13 Kraftelektronik. Spänningsomriktare. Likriktare

2.13.1 Ideal diod och transistor som brytare

Ideal diod:

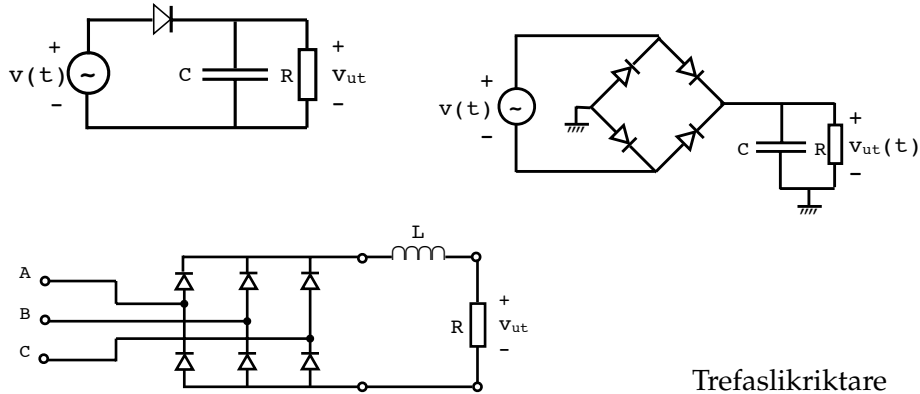


Ideal transistor som brytare:



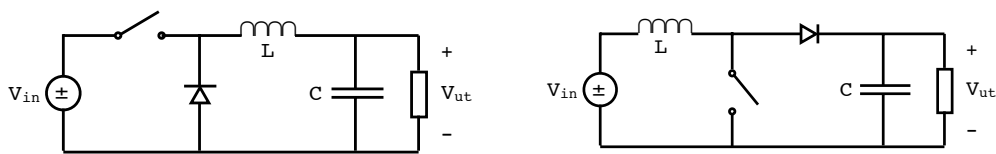
2.13.2 Likriktare

Likriktarkopplingar:



Trefaslikriktare

2.13.3 Spänningsomriktare. Buck-resp. Boostomriktare

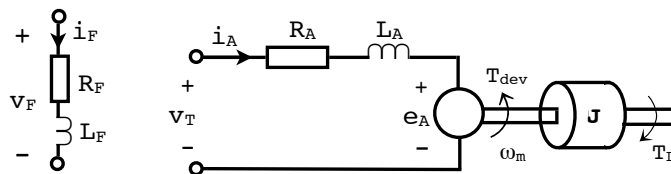


Speciellt för stationärtillstånd: $v_{L,av}$ och $i_{C,av} = 0$. (av=tidsmedelvärde)

2.14 Maskiner

Horse power: 1 hp (UK, US) = 745,5 W; (Metrisk) hästkraft: 1 hk = 735,5 W

2.14.1 Likströmsmaskiner



Dynamisk ekvivalent krets för separatmagnetiserad likströmsmaskin.

$P_{dev} = P_{rot} + P_L$. P_{dev} = mekanisk effekt, P_L = effekt till lasten. P_{rot} = rotationsförluster.

Inducerad spänning $e_A = K\phi\omega_m = \lambda\omega_m$

Vridmoment $T_{dev} = K\phi i_A = \lambda i_A$,

där ω_m = motorns vinkelhastighet; i_A = ankarström; i_F = fältström; ϕ = magnetiskt flöde; $\lambda = K\phi = K_2 i_F$ = länkat flöde; K och K_2 konstanter.

Mekanisk effekt $P_{dev} = \omega_m T_{dev}$; **Verkningsgrad** $\eta = P_{out}/P_{in} \cdot 100\%$.

Varvtalsekvationen $J d\omega_m/dt = T_{dev} - T_L$; J = tröghetsmoment, T_L = lastens vridmoment. (T_L kan t.e.x. bero som $b\omega_m$, där b är en konst.)

Speciellt vid start $\omega_m = 0$; speciellt vid tomgång $i_A = 0$.

Speciellt vid stationärtillstånd: konstanta strömmar.

2.14.2 Växelströmsmaskiner: 3-fas asynkronmaskin

asynkronmaskin = induktionsmaskin

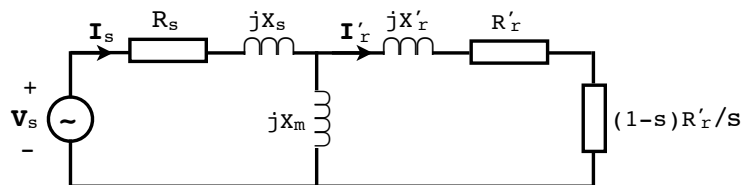
Samband mellan vinkel i **elektriska grader** θ_e och **mekaniska grader** θ_m : $\theta_e = (P/2) \theta_m$;

Synkron vinkelhastighet $\omega_s = \omega_e (P/2)$; **synkront varvtal** (rpm) $n_s = 60 f / (P/2)$;
 P =antal poler; f =nätfrekvens; $\omega = 2\pi f$ = nätvinkelfrekvens

Eftersläpning $s = (\omega_s - \omega_m) / \omega_s = (n_s - n_m) / n_s$; n_m = rotorns varvtal;

släpvinkelfrekvens $\omega_{slip} = s \omega$;

Ekvivalent krets för en fas av asynkronmotorn med rotorstorheter transformerade till statorkretsen (vinkelfrekvens ω):



För amplituderna V_s och I_s gäller dessa samband:

Delta-kopplad motor: $V_s = V_{huvudsp}$; $I_{linje} = I_s \sqrt{3}$. Y-kopplad motor: $V_s = V_{huvudsp} / \sqrt{3}$; $I_{linje} = I_s$.

Luftgapseffekt $P_{ag} = 3 R'_r |I'_r|^2 / s$ (med komplexa effektivvärden)

Mekanisk effekt $P_{dev} = 3 R'_r |I'_r|^2 (1 - s) / s$;

Vridmoment $T_{dev} = K B_r B_{total} \sin \delta$; $T_{dev} = P_{dev} / \omega_m$;

K är en konstant. B_r och B_{total} är amplituderna av rotorfältet resp. totala B-fältet.

δ = **momentvinkeln** = fasvinkeln (i el grader) mellan fälten.

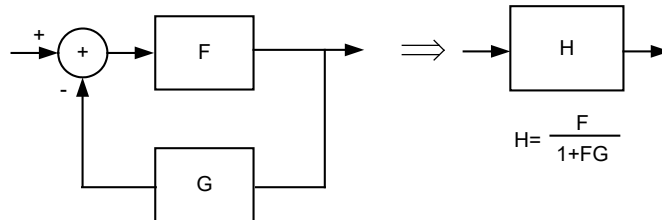
Verkningsgrad $\eta = P_{out} / P_{in} \cdot 100 \%$

Speciellt vid start ($s=1$) **startmoment** $T_{start} = P_{ag} / \omega_s$;

Komplettering av formelsamling till EEN155 2022

Relaterat till reglering

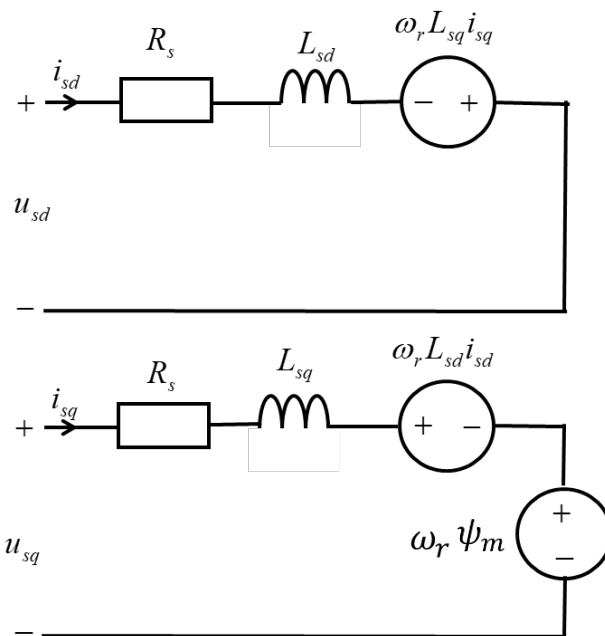
Block manipulation regel:



Överföringsfunktionen för ett första ordningens system med förstärkning 1 skrivs

$$H = \frac{\alpha}{s + \alpha}, \text{ tidskonstanten kan beräknas som } \tau = \frac{1}{\alpha} \text{ och stigtiden } t_r = \frac{\ln(9)}{\alpha}$$

Växelströmsmaskin – 3-fas Permanentmagnetiserad synkronmaskin



Ekvivalent dynamiskt kretsschema för PMSM dq-modell

$\underline{u}_s$ dq-stator-spänning $= u_{sd} + j u_{sq}$

$\underline{i}_s$ dq-stator-ström $\underline{i}_s = i_{sd} + j i_{sq}$

θ_i strömvinkel i komplexa dq-planet

$$i_{sd} = |\underline{i}_s| \cos(\theta_i)$$

$$i_{sq} = |\underline{i}_s| \sin(\theta_i)$$

R_s stator-resistans

L_{sd} stator-induktans in d-riktning

L_{sq} stator-induktans in q-riktning

ψ_m länkat flöde från magnet

ω_1 statorspänningens vinkelfrekvens $= 2\pi f_s$

ω_r elektrisk rotor vinkelfrekvens [rad/s] $= \Omega_r n_p$

Ω_r mekanisk rotor vinkelfrekvens [rad/s]

n_s mekanisk synkron hastighet [RPM] $= \frac{60 f_s}{n_p}$

n_r mekanisk rotorhastighet [RPM] $= \frac{30}{\pi} \Omega_r$

$\omega_1 = \omega_r$ and $n_s = n_r$

n_p polpartal

Utvecklat vridmoment:

$$T_e = \frac{3n_p}{2} (\psi_m i_{sq} + (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq})$$

$$\frac{J}{n_p} \frac{d\omega_r}{dt} = T_e - T_L$$

Utvecklad effekt:

$$P_e = T_e \Omega_r = T_e \frac{\omega_r}{n_p}$$

Stator effekt:

$$P_s = \frac{3}{2} \operatorname{Re}\{\underline{u}_s \underline{i}_s^*\} = \frac{3}{2} (u_{sd} i_{sd} + u_{sq} i_{sq})$$

Stator lindnings(koppar)förluster: $P_{cu1} = \frac{3}{2} R_s |\underline{i}_s|^2$

MTPA = Maximum Torque Per Ampere

Effekt för stationär växelspanning – med RMS-värden

$$|S| = |U||I| = U_{RMS}I_{RMS} = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ [VA]}$$

$$P = |S| \cos(\varphi) = U_{RMS}I_{RMS} \cos(\varphi) \text{ [W]}$$

$$\varphi = \theta_v - \theta_i = \cos^{-1} \frac{P}{|S|} = \sin^{-1} \frac{Q}{|S|} = \tan^{-1} \frac{Q}{P} \text{ [rad]}$$

$$Q = |S| \sin(\varphi) = U_{RMS}I_{RMS} \sin(\varphi) \text{ [VAR]}$$

$$\begin{aligned} Z &= R + jX \\ |Z| &= \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{|U|}{|I|} = \frac{U_{RMS}}{I_{RMS}} \\ R &= |Z| \cos(\varphi) = \frac{U_{RMS}}{I_{RMS}} \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= ZI \\ \varphi &= \cos^{-1} \frac{R}{|Z|} = \sin^{-1} \frac{X}{|Z|} = \tan^{-1} \frac{X}{R} = \theta_v - \theta_i \\ X &= |Z| \sin(\varphi) = \frac{U_{RMS}}{I_{RMS}} \sin(\varphi) \end{aligned}$$

För ett rent resistivt element

$$P = U_{RMS}I_{RMS} = \frac{U_{RMS}^2}{R} = RI_{RMS}^2$$

$$Q = 0$$

För ett rent induktivt element

$$P = 0$$

$$Q = U_{RMS}I_{RMS} = \frac{U_{RMS}^2}{X_L} = X_L I_{RMS}^2$$

För ett rent kapacitivt element

$$P = 0$$

$$Q = -U_{RMS}I_{RMS} = -\frac{U_{RMS}^2}{X_C} = -X_C I_{RMS}^2$$

Space vectors

Three-phase to two-phase transformation, stationary system (Amplitude invariant scaling)

Transforming the 3-phase quantity s_a, s_b, s_c to $\alpha\beta$

$$\begin{aligned} \underline{s}^s &= \frac{2}{3} \left(s_a + s_b e^{j\frac{2\pi}{3}} + s_c e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) = s_\alpha + js_\beta \\ \begin{bmatrix} s_\alpha \\ s_\beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_a \\ s_b \\ s_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transforming the $\alpha\beta$ quantity $\underline{s}^s$ to 3-phase s_a, s_b, s_c

$$\begin{bmatrix} s_a \\ s_b \\ s_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_\alpha \\ s_\beta \end{bmatrix}$$

$\alpha\beta$ to dq transformation, rotating system

Transforming the $\alpha\beta$ quantity, $\underline{s}^s$, to the dq-system, $\underline{s}$

$$\begin{aligned} \underline{s} &= s_d + js_q = \underline{s}^s e^{-j\theta} \\ \begin{bmatrix} s_d \\ s_q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_\alpha \\ s_\beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transforming the dq-quantity, $\underline{s}$, to the $\alpha\beta$ -system

$$\begin{aligned} \underline{s}^s &= s_\alpha + js_\beta = \underline{s} e^{j\theta} \\ \begin{bmatrix} s_\alpha \\ s_\beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_d \\ s_q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

The transformation angle, θ , is selected so that the rotor flux is oriented in the d-direction, aligned with d.

The instantaneous power in three-phase can be calculated as

$$p(t) = (u_a(t)i_a(t) + u_b(t)i_b(t) + u_c(t)i_c(t)) = \frac{3}{2} (u_\alpha(t)i_\alpha(t) + u_\beta(t)i_\beta(t)) = \frac{3}{2} \text{Re}\{\underline{u}^s \underline{i}^{s*}\} = \frac{3}{2} \text{Re}\{\underline{u} \underline{i}^*\}$$