

Tentamen Elektriska drivsystem och fält för Z2 (EEN155).

2022-08-17, 8:30-12:30.

Ansvariga lärare:

Emma Grunditz, ankn. 6010, besöker tentamen ca. 09:30 och 11:00

Andrei Osipov, ankn. 5056, besöker tentamen ca. 09:30 och 11:00

Examinator: Emma Grunditz

Tillåtna hjälpmedel:

(indexeringar och markeringar är tillåtna i Formelsamling samt tabellverk):

- Chalmersgodkänd räknare
- Tabellverk: Physics Handbook, Mathematics Handbook
- Formelsamling: endast den som bifogas denna tentamenstes

Betygsgränser: (av maximalt 50 poäng):

Betyg 3: 20 poäng

Betyg 4: 30 poäng

Betyg 5: 40 poäng

Granskning: Tid och plats anslås på Canvas.

Kom ihåg! Rita tydliga figurer med referensriktningar och beteckningar.

Glöm ej: enhet, dimensionskontroll, antaganden, motiveringar.

Om uppgifter saknas i problemtexten, gör då själv rimliga antaganden.

Uppgift 1 (7p)

En rätlinjeladdning med ändar som ligger vid $P_1(x = a, y = 2a)$ och $P_2(x = a, y = -a)$ är jämnt fördelad och har det totala värdet Q . Observationspunkten P ligger i origo.

- Skriv ut källor och koordinatvektorer för källorna- och observations-punkterna.
- Formulera integralen för potentialen i termer av ovannämnda storheter.
- Beräkna integralen för att bestämma den elektrostatiske potentialen vid origo. Tips: identiteten nedan kan vara användbar.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + b^2}| + \text{konstant} \quad (1)$$

Uppgift 2 (8p)

En cirkulär trådslinga med radien a placeras i ett magnetfält

$$\vec{B} = \hat{x}\sqrt{3}B_0 \sin(\omega t) + \hat{z}B_0[\sin(\omega t) + 3] \quad (2)$$

där $B_0 \neq 0$ är fältamplituden, ω är vinkelfrekvensen och t är tid. Normalvektorn för planet där slingan ligger är $\hat{n} = n_x\hat{x} + n_z\hat{z}$ (d.v.s. $n_y = 0$). Bestäm komponenterna n_x, n_z av normalvektorn $\hat{n}$ så att den elektromotoriska kraften (emk:n) i slingan är noll för alla t genom att följa stegen:

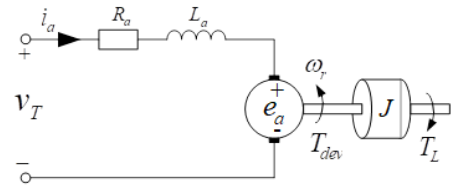
- Uttryck flödet Φ_B genom slingan i termer av ovan nämnda kvantiteter.
- Från flödet, bestäm emk:n i slingan.
- Från emk:n bestäm förhållandet n_x/n_z så att emk:n i slingan är noll för alla t . Utför normaliseringen av de vektorkomponenterna och bestäm normalvektorn $\hat{n}$.
- Vad blir vinkeln mellan slingans plan och xy -planet?

Uppgift 3 (11p)

En batterielektrisk skruvdragare drivs av en permanent-magnetiserad likströmsmotor som har parametrar enligt tabellen nedan. Vid ett tillfälle då skruvdragaren används är lastmomentet $T_L = 0,005\omega_r Nm$.

Motorparametrar:

R_a	0,1 Ω	Märk spänning	18 V
L_a	0,2 mH	Märk ström	15 A
λ	0,1 Wb		
J	$1 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$		
B_{motor}	$1 \cdot 10^{-6} \text{ Nm s/ rad}$		



- Beräkna: (4p)
 - maskinens märkvarvtal
 - maskinens tomgångsvarvtal
 - varvtalet vid vilken maskinen driver den aktuella lasten
 - maskinens verkningsgrad då den driver lasten
- Rita ankarspänning, ankarström, utvecklat vridmoment och varvtal vid ett typiskt startförlopp för en likströmsmaskin och beskriv varför graferna ser ut som de gör. Numeriska värden behöver ej redovisas. (4p)
- Rita moment-varvtalskaraktäristiken för två olika typer av laster som vi tittat på i kursen (till exempel med så kallad "konstant", "linjär" eller "kvadratisk" karaktäristik). Ge även ett exempel var, på en verklig applikation som skulle kunna representeras av de två valda lasttyperna. (2p)
- Förklara en av anledningarna till att det ibland används en växel mellan elmotor och last i ett elektriskt drivsystem. (1p)

Uppgift 4 (5p)

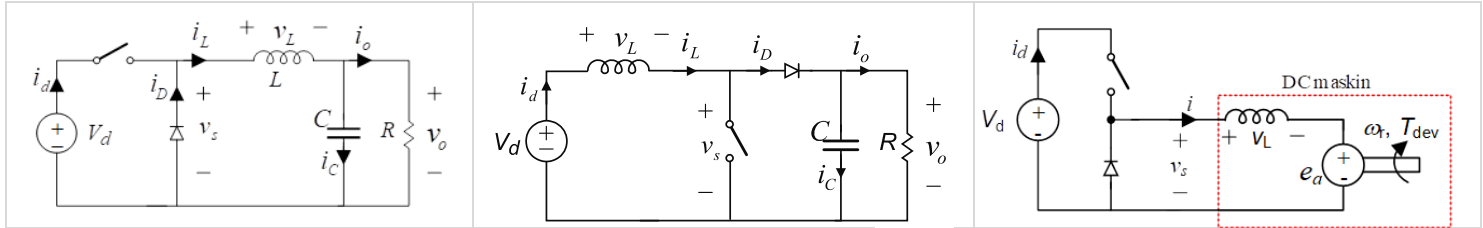
Skruvdragaren i föregående uppgift styrs via en reglage-knapp av användarens finger. Ju snabbare användaren vill att skruvdragaren skall rotera, desto mer måste knappen tryckas in. På så sätt är användaren en del av skruvdragarens varvtalsreglersystem. Läget på reglageknappen (0-100% intryckt) ger en moment-referenssignal som skall omvandlas till en strömreferenssignal till skruvdragarens inre strömregulator av likströmsmaskinen.

- Rita ett fullständigt blockschema för likströmsmaskinen och dess varvtalsreglersystem inklusive strömstyrning. Glöm ej att ange fysikalisk tolkning av alla signaler samt att ange vilka block som representerar vilken delkomponent i systemet. (3p)
- För det beskrivna lastfallet i uppgift 3, härled en lämplig strömregulator inklusive dess reglerparametrar, som har en stigtid på 30 ms. Glöm ej att redogöra för gjorda antaganden under härledningen. (2p)

Uppgift 5 (8p)

Vi har tagit upp olika typer av likspänningsomriktare i kursen.

- Av de kraftelektroniska omvandlarna som vi tagit upp i kursen, motivera vilken typ av kraftelektronisk omvandlare som är mest lämplig för skruvdragaren i uppgift 3 och 4?
(1p)
- För en BUCK, en BOOST och en 1-kvadrantomriktare, enligt nedan kretsar; förklara och visa (genom att rita och markera i deras ekvivalenta kretsscheman) hur strömmen går i de tre omriktar-kretsarna beroende på om deras switch är öppen eller stängd, när de arbetar i stationärtillstånd.
(3p)



- En BOOST-omriktare med resistans-last har inspänningen 10 V, switchfrekvensen, f_{sw} 20 kHz, induktansen, L , 800 μ H, kondensatorn, C , 470 μ F, utspänningen 24 V och en uteffekt på 20W.
 - Skissa kurvformen av spänningen över och strömmen genom induktansen och switchen över en switchperiod, samt ange relevanta antaganden.
(2p)
 - Beräkna amplituden på rippet i induktansströmmen och nämn ett förslag på hur det kan minskas för den aktuella omriktaren.
(2p)

Uppgift 6 (8p)

En elbil drivs av en Y-kopplad 4-polig asynkronmaskin via en frekvensomvandlare.

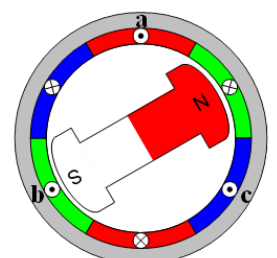
Maskinens parametrar är $R_s=0.2 \Omega$, $X_s=0.5 \Omega$, $R'_r=0.15 \Omega$, $X'_r=0.5 \Omega$ och $X_m=10 \Omega$, och dess märkspänning är 400 V (RMS huvudspänning) och 50Hz.

Vid körning i konstant hastighet domineras en bils lastkaraktäristik av dess luftmotstånd som ökar kvadratisk med hastigheten.

- Skissa asynkronmotorns momentvarvtalskaraktäristik (moment på y-axen och varvtal på x-axeln) då den matas med märkspänning. Skissa även lastens karaktäristik i det beskrivna driftfallet. Märk ut maskinens synkrona varvtal, arbetspunkten i vilken den driver lasten och märkdriftpunkten
(4p)
- Vid ett tillfälle matas maskinen med märkspänning och arbetar med en eftersläpning på 4%. Beräkna den utvecklade mekaniska effekten (dvs. axeleffekten).
(3p)
- Vid motorvägskörning vill man driva maskinen kring ett synkront varvtal på 12 000 rpm, beräkna vilken frekvens på matningsspänningen som då är nödvändig?
(1p)

Uppgift 7 (3p)

Förklara vilken PMSM-faslindning som kan användas för att skapa ett vridmoment i figuren bredvid, och vad skall strömriktningen vara för att skapa en rotation medurs (positiv ström är definierad enligt markeringarna i figuren, och negativ är tvärtom)?
(3p)



EEN155 Formelsamling

Differential Maxwell's Equations

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Integral Maxwell's Equations

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} & \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} & \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 I_{\text{enc}} + \epsilon_0 \mu_0 \oint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

where

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Induced voltage - electromotive force

$$\mathcal{V} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{stationary circuits})$$

Electrostatics

The Electric Field

Coulomb's Law:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} \hat{\mathbf{R}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

The Electric Field:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (\Phi \text{ electric potential})$$

Electric Field due to discrete point charges:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^2} \hat{\mathbf{R}}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

Electric Field due to a continuous charge distribution:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_V(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (\text{volume charge}) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_S(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \quad (\text{surface charge}) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\rho_L(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl' \quad (\text{line charge})\end{aligned}$$

Electric Potential

$$\Phi(b) - \Phi(a) = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Potential due to a localized charge distribution:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_V(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (\text{volume charge}) \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_S(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (\text{surface charge})\end{aligned}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\rho_L(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' \quad (\text{line charge})$$

Electric Potential

Work and Energy in Electrostatics

Energy stored in a point charge distribution: (Φ is potential)

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \Phi(\mathbf{r}_i)$$

Energy of a continuous charge distribution:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') dV'$$

Total energy of a continuous charge distribution:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{all space}} E^2(\mathbf{r}') dV'$$

Conductors

$\mathbf{E} = \mathbf{0}$ inside a conductor.

Electric Field immediately outside a conductor:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

Surface charge:

$$\rho_s = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

Capacitors:

$$\begin{aligned}Q &= C\Phi \\ W &= \frac{1}{2} C\Phi^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q\Phi\end{aligned}$$

Potentials

Laplace's Equation:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Electric Dipole

Dipole Moment:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV$$

Electric Dipole Potential (at origin):

$$\Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Electric Fields in Matter

Bound Charges:

$$\rho_s = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

The Electric Displacement:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{f,\text{enc}}$$

Linear Dielectrics

Polarization:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

Electric Displacement:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

Energy in a Dielectric System:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{all space}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$$

Magnetostatics

Lorentz Force Law:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Currents:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

Biot-Savart Law:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Magnetic Vector Potential

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{where} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Vector Potential Poisson's Equation:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Vector Potential when $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{0}$ at infinity:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Dipole momentum of a current loop:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Magnetic Dipole Moment for a vector area $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{m} = I \int d\mathbf{S} = I \mathbf{a}$$

Magnetic Fields in Matter

Bound Currents:

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad \mathbf{J}_s = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$$

Auxiliary Field:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f$$

Linear Media

Magnetization in linear media:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

Auxiliary Field:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$$

Volume bound current:

$$\mathbf{J}_b = \chi_m \mathbf{J}_f$$

Boundary Conditions

Tangential components:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (\mathbf{J}_s \text{ surface current})$$

Normal components:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \quad (\rho_s \text{ surface charge})$$

Vector Derivatives

Cartesian

$$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}, \quad dV = dx dy dz$$

Gradient:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Laplace:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Spherical

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Gradient:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Curl:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} +$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial v_r}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (rv_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplace:

$$\nabla^2 f =$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical

$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$

Gradient:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} +$$

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\phi) - \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

Laplace:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Fundamental Theorems

Fundamental Theorem of Line Integrals:

$$\int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$$

Divergence Theorem:

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

Stoke's Theorem:

$$\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Vector Identities

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) = 4\pi \delta^3(R)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R}$$

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x)$$

Spherical Coordinates

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\sqrt{x^2 + y^2} / z \right)$$

$$\phi = \tan^{-1}(y/x)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}$$

Cylindrical Coordinates

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$z = z$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \cos \phi \hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \sin \phi \hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}(y/x)$$

$$z = z$$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}$$

FORMELSAMLING

Elektriska drivsystem EEN155

©Eva Palmberg
Institutionen för Elektroteknik
Chalmers tekniska högskola

2022

Innehåll

1	Symbolsamling	2
1.1	Referenser	2
1.2	Aktiva kretselement	2
1.3	Passiva ideala element	2
1.4	Resistanslösa anslutningar	2
2	Formelsamling	4
2.1	Ström, spänning, effekt, energi, potential	4
2.2	Ohms lag, resistans, konduktans	4
2.3	Kirchhoffs lagar, spännings- och strömdelning	4
2.4	Mask- och nodanalys. Cramers regel	5
2.5	Ekvivalenta tvåpoler. Anpassning	5
2.6	Kapacitans och induktans	5
2.7	Transienter, tidskonstanter	6
2.8	Komplexa spänningar; impedans	6
2.9	Effekt, komplex effekt, effektivvärde, anpassning	6
2.10	Symmetriska trefassystem	7
2.11	Ideal transformator	8
2.12	Magnetfält. Inducerad spänning	8
2.13	Kraftelektronik, Spänningsomriktare, Likriktare	8
2.13.1	Ideal diod och transistor som brytare	8
2.13.2	Likriktare	9
2.13.3	Spänningsomriktare. Buck- resp. Boostomriktare	9
2.14	Maskiner	9
2.14.1	Likströmsmaskiner	9
2.14.2	Växelsströmsmaskiner, asynkronmaskin	10

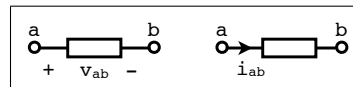
Kompletterande delar

- Relaterat till regelring
- Växelsströmsmaskin – 3-fas Permanentmagnetiserad synkronmaskin
- Effekt för stationär växelspanning – med RMS-värden
- Space vectors

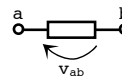
1 Symbolsamling

1.1 Referenser

Spänning v och ström i : $+v - ; \rightarrow i$



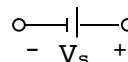
(Hambley använder ibland en pil med $+$ vid pilspetsen som referens för spänning.)



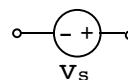
(Physics Handbook har en pil med $-$ vid pilspetsen som referens för spänning)

1.2 Aktiva ideala kretselement

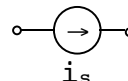
Likspänningskälla



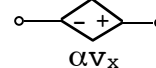
Oberoende spänningskälla



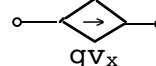
Oberoende strömkälla



Beroende spänningskälla



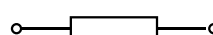
Beroende strömkälla



En beroende källa styrs av en spänning eller ström någonstans i kretsen, t.ex. en spänning v_x för figurerna ovan.

1.3 Passiva ideala element

Allmänt kretselement

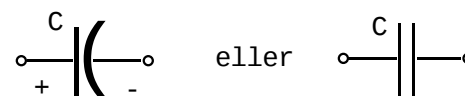


Kretselementen R, C och L:

Resistans



Kapacitans



Induktans

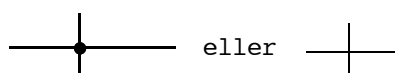


1.4 Resistanslösa ledningar och anslutningar

Anslutningspunkt



Kontaktpunkt



Korsning utan kontakt



Anslutning till jord



2 Formelsamling

2.1 Ström, spänning, effekt, energi, potential

Ström $i = dq/dt$ $q = \text{laddning}$

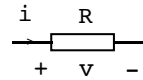
Spänning $v = dw/dq$ $w = \text{energi}$

Effekt $p = v \cdot i = dw/dt$

Spänning $v = v_A - v_B = \text{potentialskillnad};$ $v_A, v_B = \text{potential}$

2.2 Ohms lag, resistans, konduktans – linjära kretsar –

Ohms lag $\begin{cases} v = R i \\ i = G v \end{cases}$



Resistans R

Konduktans $G = 1/R$

Resistans för homogen rak ledare med längden L , tvärsnittsytan A och resistiviteten ρ :
 $R = \rho L / A$.

Effekt i resistans $p = Ri^2 = v^2/R$

2.3 Kirchhoffs lagar, spännings- och strömdelning

Kirchhoffs strömlag, KCL: $\sum_k i_k = 0$ i en nod;

Kirchhoffs spänningslag, KVL: $\sum_k v_k = 0$ i en slinga

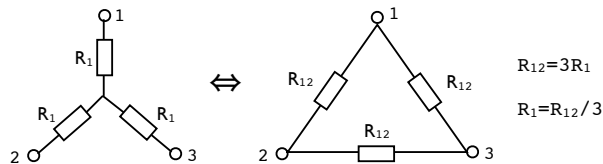
Seriekopplade resistanser: $R_s = \sum_n R_n$

Parallellkopplade resistanser: $G_p = \sum_n G_n$

eller med R : $\frac{1}{R_p} = \sum_n \frac{1}{R_n}$

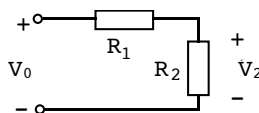
specialfall $n=2$: två parallella resistanser: $R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Stjärn-triangeltransformationen ($Y-\Delta$) och omvänt: specialfall: 3 lika resistanser



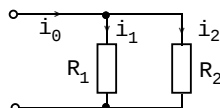
Spänningsdelning

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0$$



Strömdelning

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_0$$



2.4 Mask- och nodanalys. Cramers regel

Maskanalys: matrisekvation $\boxed{\mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{V}_s}$

$\mathbf{R}$ = maskresistansmatris, $\mathbf{i}$ = maskströmvektor, $\mathbf{V}_s$ = spänningskällevektor

Element i resistansmatrisen: $r_{11} = \sum R$ i maska 1; $r_{12} = r_{21} = -\sum R$ gemensamma för maska 1 och 2; o.s.v.

Nodanalys: matrisekvation $\boxed{\mathbf{G}\mathbf{V} = \mathbf{I}_s}$

$\mathbf{G}$ = nodkonduktansmatris, $\mathbf{V}$ = nodspänningsvektor, $\mathbf{I}_s$ = strömkällevektor

Element i konduktansmatrisen: $g_{11} = \sum G$ i grenar anslutna till nod 1;

$g_{12} = g_{21} = -\sum G$ anslutna direkt mellan nod 1 och nod 2; o.s.v.

Cramers regel – lösning av matrisekvation:

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$; med lösningen $x_k = \Delta_k / \Delta$,

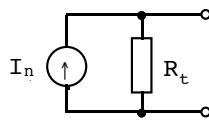
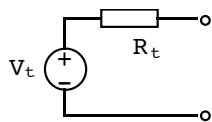
där Δ = determinanten av $\mathbf{A}$ och Δ_k = determinanten av $\mathbf{A}$ med kolumn k utbytt mot $\mathbf{b}$.

Determinant av 2x2-matris: $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3x3-matris:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

2.5 Ekvivalenta tvåpoler. Anpassning



$$R_t = V_t / I_n$$

Thévenins respektive Nortons ekvivalenta tvåpol

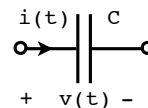
V_t = **tomgångsspänning**; I_n = **kortslutningsström**

Anpassning: $R_L = R_t$ (rent resistiva kretsar)

2.6 Kapacitans och induktans

Kapacitans C: ström-spänningsberoende $\boxed{i(t) = Cdv/dt}$

lagrad **energi** $w_C = \frac{1}{2} C v^2(t)$

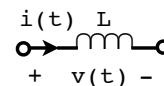


Parallell- resp. seriekopplade kapacitanser utan begynnelseenergi (= begynnelsepänningar):

$$C_p = \sum C_n; \quad \frac{1}{C_s} = \sum \frac{1}{C_n}$$

Induktans L: ström-spänningsberoende $\boxed{v(t) = Ldi/dt}$

lagrad **energi** $w_L = \frac{1}{2} L i^2(t)$



Parallell- resp. seriekopplade induktanser utan begynnelseenergi (=begynnelseströmmar):

$$\frac{1}{L_p} = \sum \frac{1}{L_n}; \quad L_s = \sum L_n$$

2.7 Transienter, tidskonstanter

Första ordningens kretsar med tidskonstanta källor

KVL, KCL leder till inhomogena differentialekvationer för v eller i av formen

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v(t) = \frac{V_0}{\tau} \quad \text{med } V_0 = \text{konst och } \tau = \text{en tidskonstant}$$

Ansätt lösningen $v(t) = k_1 + k_2 e^{-t/\tau}$

k_1 och k_2 är konstanter som bestäms ur diff.ekv. och begynnelsevillkor.

k_1 = partikulär lösning – **stationär lösning**

$k_2 e^{-t/\tau}$ = lösning till homogena diff.ekv. – **transient lösning**

Specialfall: RC-kretsen: $\tau = RC$;

RL-kretsen: $\tau = L/R$

2.8 Stationärtillstånd. Komplexa spänningar, strömmar, impedans

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) = \operatorname{Re}\{V e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{V_m e^{j(\omega t + \theta_v)}\}$$

där den komplexa spänningen $V = V_m e^{j\theta_v}$ komplexa toppvärden

$$\omega = 2\pi f; \quad \omega = \text{vinkelfrekvens, } f = \text{frekvens}$$

$$\text{impedans } Z = V/I = R + jX; \text{ admittans } Y = 1/Z = G + jB;$$

där R = resistans, X = reaktans, G = konduktans, B = susceptans

Speciellt för resistans R : $Z = R$

induktans L : $Z = j\omega L$

kapacitans C : $Z = 1/j\omega C$

OBS! Formlerna i avsnitt 2.3, 2.4, 2.5 gäller för motsvarande komplexa storheter V, I, Z, Y .

$c = a + jb$ rektangulär form; $c^* = a - jb$ komplexkonjugerat;

$c = |c| e^{j\theta} = |c| \angle \theta$ polär form; $j = \sqrt{-1}$

där beloppet $|c| = \sqrt{cc^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$ och vinkeln $\theta = \arctan(b/a)$

2.9 Effekt, komplex effekt, effektivvärde, anpassning

Ögonblicksvärde (momentanvärde) av effekt $p(t) = v(t)i(t)$

medeleffekt, aktiv effekt $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$; T = periodtiden

speciellt för sinusformad växelström $P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$

där θ_v = spänningens fasvinkel, θ_i = strömmens fasvinkel

$$\text{Komplex effekt } S = P + jQ = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + j \frac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i)$$

där P = aktiv effekt och Q = reaktiv effekt; $*$ = komplexkonjugat

Skenbar effekt $|S| = \frac{1}{2} V_m I_m$

effektfaktor $\cos(\theta_v - \theta_i)$

induktiv last $\theta_v - \theta_i > 0$; (lagging i Hambley)

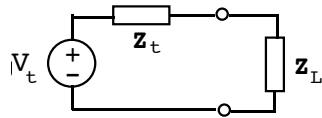
kapacitiv last $\theta_v - \theta_i < 0$; (leading i Hambley)

Effektivvärde, (rms)

$$I_{\text{eff}} = I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i(t)]^2 dt} \quad (\text{rms} = \text{root mean square})$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m \quad \text{för sinusformad växelström}$$

Anpassning



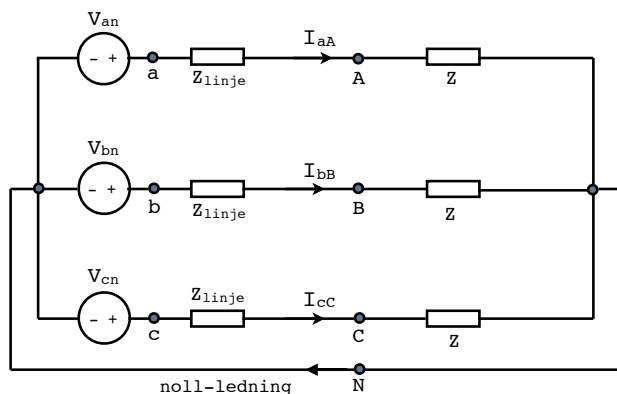
Maximal effekt P_L i belastningen Z_L för

- 1/ $Z_L = Z_t^*$ om $Z_L = R_L + jX_L$ kan väljas fritt; $*$ = komplexkonjugat
- 2/ $Z_L = R_L = |Z_t|$ om enbart $|Z_L|$ kan varieras

Andra fall av anpassning: Teckna P_L och kolla villkoren för $P_{L\text{max}}$!

2.10 Symmetriska trefassystem

(Generatorspänningarna symmetriska, faserna impedansmässigt lika)
Y-kopplade generatorer V_{an} , V_{bn} och V_{cn} och laster Z i figuren nedan.



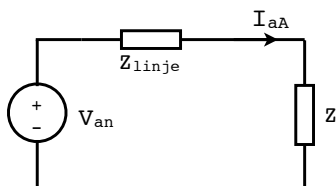
Symmetrisk trefasspänning - positiv fasföljd abc, komplexa toppvärden:

$$V_{an} = V e^{j0^\circ}; \quad V_{bn} = V e^{-j120^\circ}; \quad V_{cn} = V e^{j120^\circ}; \quad \text{fasspänningar}$$

$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn} = V\sqrt{3} e^{j30^\circ}; \quad V_{bc} = \dots; \quad V_{ca} = \dots; \quad \text{huvudspänningar}$$

$$I_{aA}, I_{bB}, I_{cC}; \quad \text{linjeströmmar}$$

Ekvivalent enfaskrets till kretsen ovan:

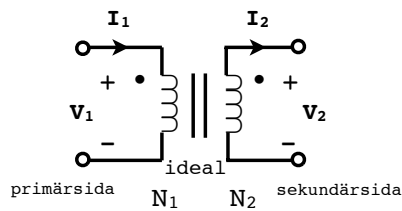


Effekt till de tre belastningarna Z :

$$P = 3 \frac{1}{2} \text{Re}\{Z\} |I_{aA}|^2$$

Transformer av Deltakopplad last till ekvivalent Y: se stjärn-triangeltransformationen för resistanser, avsnitt 2.3!

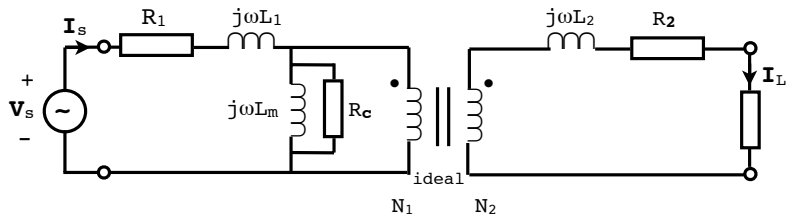
2.11 Ideal transformator resp. mer realistisk modell



$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}; \quad N_1 I_1 - N_2 I_2 = 0; \quad (\text{ideal transformator})$$

omsättningstal $n = N_1/N_2$ (definieras ibland som N_2/N_1)

impedanstransformering till primärsidan $Z'_L = (N_1/N_2)^2 Z_L$ (ideal transformator)



2.12 Magnetfält. Inducerad spänning

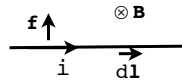
Magnetfält B på avståndet r från lång rak **strömförande ledare** med strömmen I :

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r};$$



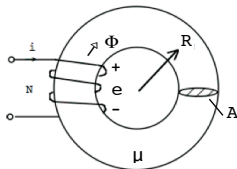
Kraft f på **strömförande ledare**, med strömmen i och längden ℓ i ett (yttre) magnetfält B :

$$\mathbf{f} = \int i d\mathbf{l} \times \mathbf{B};$$



Speciellt för
homogent $B \perp i$
: $f = Bi\ell$

B i **toroid** med kärna av magnetiskt material (μ), medelradie R , tvärsnittsytta A , lindad med N st varv med ström i :



$$B = \mu Ni / 2\pi R; \quad \phi \approx BA;$$

Inducerad spänning i lindningen: $e = Nd\phi/dt$;

$$\text{Reluktans } \mathcal{R} = \ell / \mu A = 2\pi R / \mu A;$$

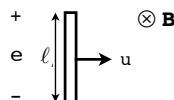
$$\Rightarrow \phi = Ni / \mathcal{R}$$

$$\text{Induktans } L = N\phi / i = N^2 / \mathcal{R}$$

Rak **ledare** med längden ℓ rör sig **med hastigheten u** vinkelrätt mot ett magnetfält B :

Inducerad spänning i ledaren

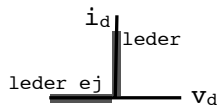
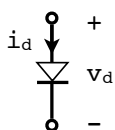
$$e = B\ell u;$$



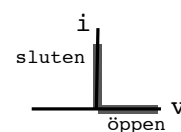
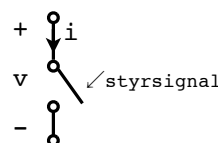
2.13 Kraftelektronik. Spänningsomriktare. Likriktare

2.13.1 Ideal diod och transistor som brytare

Ideal diod:

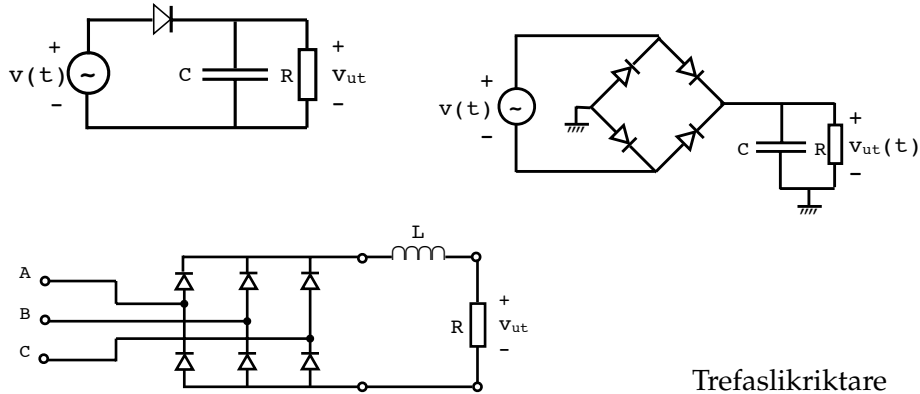


Ideal transistor som brytare:



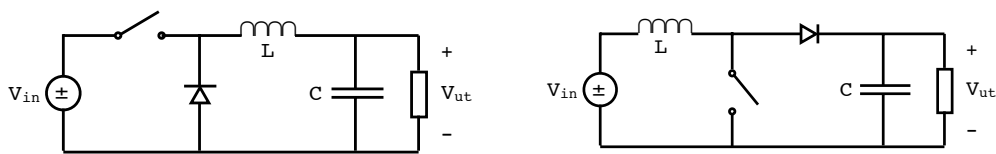
2.13.2 Likriktare

Likriktarkopplingar:



Trefaslikriktare

2.13.3 Spänningsomriktare. Buck-resp. Boostomriktare

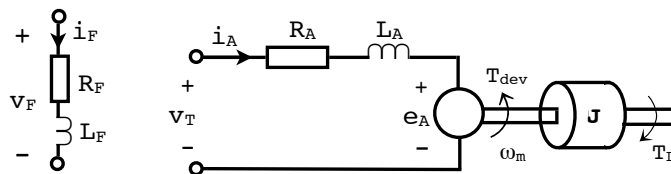


Speciellt för stationärtillstånd: $v_{L,av}$ och $i_{C,av} = 0$. (av=tidsmedelvärde)

2.14 Maskiner

Horse power: 1 hp (UK, US) = 745,5 W; (Metrisk) hästkraft: 1 hk = 735,5 W

2.14.1 Likströmsmaskiner



Dynamisk ekvivalent krets för separatmagnetiserad likströmsmaskin.

$P_{dev} = P_{rot} + P_L$. P_{dev} = mekanisk effekt, P_L = effekt till lasten. P_{rot} = rotationsförluster.

Inducerad spänning $e_A = K\phi\omega_m = \lambda\omega_m$

Vridmoment $T_{dev} = K\phi i_A = \lambda i_A$,

där ω_m = motorns vinkelhastighet; i_A = ankarström; i_F = fältström; ϕ = magnetiskt flöde; $\lambda = K\phi = K_2 i_F$ = länkat flöde; K och K_2 konstanter.

Mekanisk effekt $P_{dev} = \omega_m T_{dev}$; **Verkningsgrad** $\eta = P_{out}/P_{in} \cdot 100\%$.

Varvtalsekvationen $J d\omega_m/dt = T_{dev} - T_L$; J = tröghetsmoment, T_L = lastens vridmoment. (T_L kan t.e.x. bero som $b\omega_m$, där b är en konst.)

Speciellt vid start $\omega_m = 0$; speciellt vid tomgång $i_A = 0$.

Speciellt vid stationärtillstånd: konstanta strömmar.

2.14.2 Växelspörmaskiner: 3-fas asynkronmaskin

asynkronmaskin = induktionsmaskin

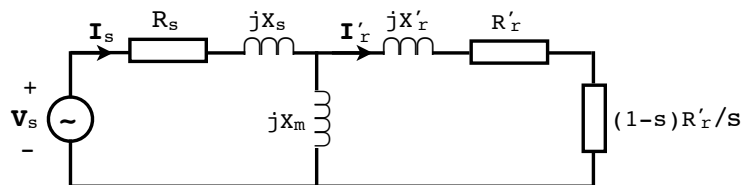
Samband mellan vinkel i **elektriska grader** θ_e och **mekaniska grader** θ_m : $\theta_e = (P/2) \theta_m$;

Synkron vinkelhastighet $\omega_s = \omega_e (P/2)$; **synkront varvtal** (rpm) $n_s = 60 f / (P/2)$;
 P =antal poler; f =nätfrekvens; $\omega = 2\pi f$ = nätvinkelfrekvens

Eftersläpning $s = (\omega_s - \omega_m) / \omega_s = (n_s - n_m) / n_s$; n_m = rotorns varvtal;

släpvinkelfrekvens $\omega_{slip} = s \omega$;

Ekvivalent krets för en fas av asynkronmotorn med rotorstorheter transformerade till statorkretsen (vinkelfrekvens ω):



För amplituderna V_s och I_s gäller dessa samband:

Delta-kopplad motor: $V_s = V_{huvudsp}$; $I_{linje} = I_s \sqrt{3}$. Y-kopplad motor: $V_s = V_{huvudsp} / \sqrt{3}$; $I_{linje} = I_s$.

Luftgapseffekt $P_{ag} = 3 R'_r |I'_r|^2 / s$ (med komplexa effektivvärden)

Mekanisk effekt $P_{dev} = 3 R'_r |I'_r|^2 (1 - s) / s$;

Vridmoment $T_{dev} = K B_r B_{total} \sin \delta$; $T_{dev} = P_{dev} / \omega_m$;

K är en konstant. B_r och B_{total} är amplituderna av rotorfältet resp. totala B-fältet.

δ = **momentvinkeln** = fasvinkeln (i el grader) mellan fälten.

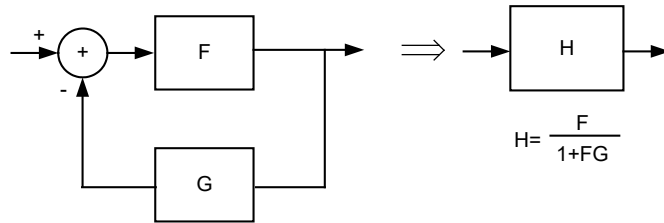
Verkningsgrad $\eta = P_{out} / P_{in} \cdot 100 \%$

Speciellt vid start ($s=1$) **startmoment** $T_{start} = P_{ag} / \omega_s$;

Komplettering av formelsamling till EEN155 2022

Relaterat till reglering

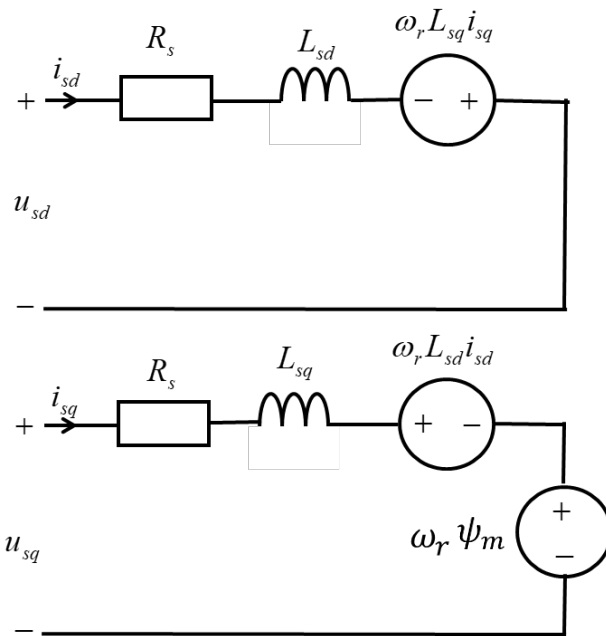
Block manipulation regel:



Överföringsfunktionen för ett första ordningens system med förstärkning 1 skrivs

$$H = \frac{\alpha}{s + \alpha}, \text{ tidskonstanten kan beräknas som } \tau = \frac{1}{\alpha} \text{ och stigtiden } t_r = \frac{\ln(9)}{\alpha}$$

Växelströmsmaskin – 3-fas Permanentmagnetiserad synkronmaskin



Ekvivalent dynamiskt kretsschema för PMSM dq-modell

$\underline{u}_s$ dq-stator-spänning $= u_{sd} + j u_{sq}$

$\underline{i}_s$ dq-stator-ström $\underline{i}_s = i_{sd} + j i_{sq}$

θ_i strömvinkel i komplexa dq-planet

$$i_{sd} = |\underline{i}_s| \cos(\theta_i)$$

$$i_{sq} = |\underline{i}_s| \sin(\theta_i)$$

R_s stator-resistans

L_{sd} stator-induktans in d-riktning

L_{sq} stator-induktans in q-riktning

ψ_m länkat flöde från magnet

ω_1 statorspänningens vinkelfrekvens $= 2\pi f_s$

ω_r elektrisk rotor vinkelfrekvens [rad/s] $= \Omega_r n_p$

Ω_r mekanisk rotor vinkelfrekvens [rad/s]

n_s mekanisk synkron hastighet [RPM] $= \frac{60 f_s}{n_p}$

n_r mekanisk rotor hastighet [RPM] $= \frac{30}{\pi} \Omega_r$

$\omega_1 = \omega_r$ and $n_s = n_r$

n_p polpartal

Utvecklat vridmoment:

$$T_e = \frac{3n_p}{2} (\psi_m i_{sq} + (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq})$$

$$\frac{J}{n_p} \frac{d\omega_r}{dt} = T_e - T_L$$

Utvecklad effekt: $P_e = T_e \Omega_r = T_e \frac{\omega_r}{n_p}$

Stator effekt: $P_s = \frac{3}{2} \operatorname{Re}\{\underline{u}_s \underline{i}_s^*\} = \frac{3}{2} (u_{sd} i_{sd} + u_{sq} i_{sq})$

Stator lindnings(koppar)förluster: $P_{cu1} = \frac{3}{2} R_s |\underline{i}_s|^2$

MTPA = Maximum Torque Per Ampere

Effekt för stationär växelspanning – med RMS-värden

$$|S| = |U||I| = U_{RMS}I_{RMS} = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ [VA]}$$

$$P = |S| \cos(\varphi) = U_{RMS}I_{RMS} \cos(\varphi) \text{ [W]}$$

$$\varphi = \theta_v - \theta_i = \cos^{-1} \frac{P}{|S|} = \sin^{-1} \frac{Q}{|S|} = \tan^{-1} \frac{Q}{P} \text{ [rad]}$$

$$Q = |S| \sin(\varphi) = U_{RMS}I_{RMS} \sin(\varphi) \text{ [VAR]}$$

$$\begin{aligned} Z &= R + jX \\ |Z| &= \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{|U|}{|I|} = \frac{U_{RMS}}{I_{RMS}} \\ R &= |Z| \cos(\varphi) = \frac{U_{RMS}}{I_{RMS}} \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= ZI \\ \varphi &= \cos^{-1} \frac{R}{|Z|} = \sin^{-1} \frac{X}{|Z|} = \tan^{-1} \frac{X}{R} = \theta_v - \theta_i \\ X &= |Z| \sin(\varphi) = \frac{U_{RMS}}{I_{RMS}} \sin(\varphi) \end{aligned}$$

För ett rent resistivt element

$$\begin{aligned} P &= U_{RMS}I_{RMS} = \frac{U_{RMS}^2}{R} = RI_{RMS}^2 \\ Q &= 0 \end{aligned}$$

För ett rent induktivt element

$$\begin{aligned} P &= 0 \\ Q &= U_{RMS}I_{RMS} = \frac{U_{RMS}^2}{X_L} = X_L I_{RMS}^2 \end{aligned}$$

För ett rent kapacitivt element

$$\begin{aligned} P &= 0 \\ Q &= -U_{RMS}I_{RMS} = -\frac{U_{RMS}^2}{X_C} = -X_C I_{RMS}^2 \end{aligned}$$

Space vectors

Three-phase to two-phase transformation, stationary system (Amplitude invariant scaling)

Transforming the 3-phase quantity s_a, s_b, s_c to $\alpha\beta$

$$\begin{aligned} \underline{s}^s &= \frac{2}{3} \left(s_a + s_b e^{j\frac{2\pi}{3}} + s_c e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) = s_\alpha + js_\beta \\ \begin{bmatrix} s_\alpha \\ s_\beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_a \\ s_b \\ s_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transforming the $\alpha\beta$ quantity $\underline{s}^s$ to 3-phase s_a, s_b, s_c

$$\begin{bmatrix} s_a \\ s_b \\ s_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_\alpha \\ s_\beta \end{bmatrix}$$

$\alpha\beta$ to dq transformation, rotating system

Transforming the $\alpha\beta$ quantity, $\underline{s}^s$, to the dq-system, $\underline{s}$

$$\begin{aligned} \underline{s} &= s_d + js_q = \underline{s}^s e^{-j\theta} \\ \begin{bmatrix} s_d \\ s_q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_\alpha \\ s_\beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transforming the dq-quantity, $\underline{s}$, to the $\alpha\beta$ -system

$$\begin{aligned} \underline{s}^s &= s_\alpha + js_\beta = \underline{s} e^{j\theta} \\ \begin{bmatrix} s_\alpha \\ s_\beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_d \\ s_q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

The transformation angle, θ , is selected so that the rotor flux is oriented in the d-direction, aligned with d.

The instantaneous power in three-phase can be calculated as

$$p(t) = (u_a(t)i_a(t) + u_b(t)i_b(t) + u_c(t)i_c(t)) = \frac{3}{2} (u_\alpha(t)i_\alpha(t) + u_\beta(t)i_\beta(t)) = \frac{3}{2} \text{Re}\{\underline{u}^s \underline{i}^{s*}\} = \frac{3}{2} \text{Re}\{\underline{u} \underline{i}^*\}$$