

Tentamen

MVE335 Matematik 1 för Sjöingenjörer

2025-29-10, 08.30 – 12.30

tel: 031-772 12 44 (Exam: Olof Giselsson)

Hjälpmedel: bif. formelblad, Chalmersgodkänd räknare.

För betyg 3 krävs 20 poäng på godkändtdelen. För betyg 4 krävs 33 poäng totalt, varav minst 6 poäng på överbetygsdelen. För betyg 5 krävs 42 poäng poäng totalt, varav minst 12 poäng på överbetygsdelen.

Bonuspoäng från introkurs HT25, och duggor räknas med på godkändtdelen.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkändtdelen

1. (a) I polynomet $2x^2 - 5x + 3$, byt variabel till $x = z + a$, och bestäm a så att det nya polynomet (nu i z) saknar $z(=z^1)$ -termen. (2p)

Lösning. Insättning av $x = z + a$ ger

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &= 2(z+a)^2 - 5(z+a) + 3 = 2z^2 + 4az + a^2 - 5z - 5a + 3 = \\ &= 2z^2 + (4a-5)z + 3 - 5a + a^2. \end{aligned}$$

Om z -koefficienten ska vara 0, så måste vi ha $4a - 5 = 0$, vilket ger $a = 5/4$.

- (b) Lös ekvationen $\frac{1}{4 - \frac{6}{1+x}} = x$. (2p)

Lösning. Vi börjar med att förenkla vänsterledet. Vi har

$$\frac{1}{4 - \frac{6}{1+x}} = \frac{1}{\frac{4(1+x)}{1+x} - \frac{6}{1+x}} = \frac{1}{\frac{4x-2}{1+x}} = \frac{1+x}{4x-2}.$$

Ekvationen blir då

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{4x-2} = x &\Rightarrow 1+x = x(4x-2) = 4x^2 - 2x \Leftrightarrow \\ &4x^2 - 3x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Vi kan lösa den sista ekvationen med lämplig metod. Vi använder kvadratkomplettering:

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - \frac{3}{4})^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow (2x - \frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}.$$

Detta ger $2x = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$, så att vi har lösningar $x = 1$ och $x = -\frac{1}{4}$. Då den enda faktorn vi har multiplicerat in är $x+1$, vilket inte är 0 i lösningarna, så har vi inte introducerat några extra nollställen.

- (c) Förenkla $\frac{a^2 - \frac{4a}{b} + 4}{a - 2b}$. Skriv svaret som ett bråk. (2p)

Lösning. Vi börjar med att faktorisera täljaren

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{4a}{b} + 4 = \frac{a^2 - 4ab + 4b^2}{b^2} = \frac{(a - 2b)^2}{b^2}.$$

Det följer att

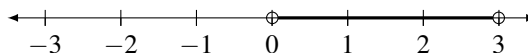
$$\frac{\frac{(a-2b)^2}{b^2}}{a-2b} = \frac{(a-2b)^2}{(a-2b)b^2} = \frac{a-2b}{b^2}.$$

- (d) Lös olikheten $3 > |2x - 3|$. Rita området på reella linjen. (2p)

Lösning. Vi har att $x \in \mathbb{R}$ uppfyller $3 > |2x - 3|$ om $3 > 2x - 3$ och $3 > -(2x - 3) = 3 - 2x$.

Från första kriteriet får vi $3 > 2x - 3 \Leftrightarrow 6 > 2x$, vilket ger $3 > x$. Från andra kriteriet får vi $3 > 3 - 2x \Leftrightarrow 0 > -2x$, vilket ger $x > 0$ (OBS! olikheten byter håll när vi dividerar med -2).

Sätter vi ihop dessa två kriterierna, så har vi att $0 < x < 3$. Detta ritas på reella linjen såsom



2. (a) En linje går igenom punkterna $(2, -1)$ och $(-1, 5)$. Bestäm i vilken punkt den skär en annan linje som ges av $y = 3x - 2$. (3p)

Lösning. Vi räknar först ut linjen genom punkterna. Riktningkoefficienten ges av

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-1)}{-1 - (2)} = \frac{6}{-3} = -2.$$

Vi får sen från enpunktsformeln att med vald punkt $(2, -1)$, så ges linjen ekvation av $(y + 1) = -2(x - 2)$, vilket vi skriver om till $y = -2x + 3$. Skärningspunkten ges nu av lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = -2x + 3 & (EKV1) \\ y = 3x - 2 & (EKV2) \end{cases}$$

Sätter vi in formeln för y från $EKV2$ i $EKV1$, så får vi $3x - 2 = -2x + 3 \Leftrightarrow 5x = 5$, vilket ger $x = 1$. Insättning av detta i $EKV1$, ger att $y = -2(1) + 3 = 1$. Så linjerna möts i $(1, 1)$

- (b) Bestäm största avstånd från punkten $(2, -2)$ till cirkeln $x^2 + y^2 - 4(2y - 3x) = 12$. (2p)

Lösning. Vi börjar med att hitta cirkelns mittpunkt och radie m.h.a. kvadratkomplettering

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4(2y - 3x) = 12 &= x^2 + 12x + y^2 - 8y = (x + 6)^2 + (y - 4)^2 - 6^2 - 4^2 = \\ &= (x + 6)^2 + (y - 4)^2 - 52 = 12 \Leftrightarrow (x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 64 = 8^2. \end{aligned}$$

Så cirkeln har mittpunkt i $(-6, 4)$ och radie 8. Vi ser också att punkten $(2, -2)$ inte är på cirkeln. Det största avståndet från punkten till cirkeln ges nu av avståndet till mittpunkten plus radien. Avståndet från $(2, -2)$ till $(-6, 4)$ ges av

$$\sqrt{(2 - (-6))^2 + ((-2) - 4)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10,$$

så att största avståndet blir $8 + 10 = 18$.

- (c) Linjen $y = 2x - 1$ skär kurvan $y = x^3 - 3x + 1$ när $x = 2$. Hitta de andra skärningspunkterna (endast x -koordinaten krävs). (3p)

Lösning. Linjen och kurvan skär varandra då

$$2x - 1 = x^3 - 3x + 1,$$

vilket är detsamma som ekvationen $x^3 - 5x + 2 = 0$. Vi vet en lösning $x = 2$, vilket betyder att polynomet $x^3 - 5x + 2$ har $x - 2$ som en faktor. Polynomdivision ger oss nu att

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 1 \\ x-2 \overline{) x^3 - 5x + 2} \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ 2x^2 - 5x \\ \underline{-2x^2 + 4x} \\ -x + 2 \\ \underline{x - 2} \\ 0 \end{array}$$

Från detta har vi faktoriseringen

$$x^3 - 5x + 2 = (x - 2)(x^2 + 2x - 1).$$

De andra nollställena till $x^3 - 5x + 2$ ges då av nollställena till $x^2 + 2x - 1$. Vi hittar nollställena med kvadratkomplettering

$$x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 2,$$

vilket ger att de andra skärningspunkterna är i $x = -1 + \sqrt{2}$ och $x = -1 - \sqrt{2}$

3. (a) Låt $\mathbf{x} = (4, -3)$ och $\mathbf{v} = (4, 2)$. Bestäm tal $a, b \in \mathbb{R}$, så att $\mathbf{w} = a\mathbf{x} + b\mathbf{v}$, har $|\mathbf{w}| = 1$ och $\mathbf{x} \bullet \mathbf{w} = 0$. (3p)

Lösning. Vi löser ekvationen

$$0 = \mathbf{x} \bullet (a\mathbf{x} + b\mathbf{v}) = a(\mathbf{x} \bullet \mathbf{x}) + b(\mathbf{x} \bullet \mathbf{v}) = a|\mathbf{x}|^2 + b(\mathbf{x} \bullet \mathbf{v}),$$

Vilket ger $a = -\frac{(\mathbf{x} \bullet \mathbf{v})}{|\mathbf{x}|^2}b$. Så alla vektorer på formen

$$b\left(-\frac{(\mathbf{x} \bullet \mathbf{v})}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x} + \mathbf{v}\right)$$

har skalärprodukt 0 med $\mathbf{x}$. Vi räknar ut

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = 4^2 + (-3)^2 = 25$$

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{v} = 4 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 = 10,$$

så att vi har $-\frac{\mathbf{x} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{x}|^2} = -\frac{10}{25} = -\frac{2}{5}$. Det återstår att räkna ut b . Då vi ska ha

$$1 = \left| b\left(-\frac{2}{5}\mathbf{x} + \mathbf{v}\right) \right| = |b| \left| -\frac{2}{5}\mathbf{x} + \mathbf{v} \right|,$$

vilket visar (om vi antar $b > 0$) att vi kan ta

$$b = \frac{1}{\left| -\frac{2}{5}\mathbf{x} + \mathbf{v} \right|}.$$

Vi räknar först

$$-\frac{2}{5}\mathbf{x} + \mathbf{v} = -\frac{2}{5}(4, -3) + (4, 2) = \left(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right) + (4, 2) = \left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right),$$

vilket har längd

$$\left| \left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right) \right| = \frac{1}{5}|(12, 16)| = \frac{1}{5}\sqrt{12^2 + 16^2} = \frac{1}{5}\sqrt{144 + 256} = \frac{1}{5}\sqrt{400} = \frac{20}{5} = 4.$$

Från detta får vi $b = \frac{1}{4}$, och sen $a = -\frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})}{|\mathbf{x}|^2}b = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{10}$.

$$(b) \text{ Lös ekvationssystemet } \begin{cases} 5 - x + y + z = 0 \\ 3 + x + y - z = 0 \\ 1 - 3y + z = 0 \end{cases} \quad (3p)$$

Lösning. Vi numrerar ekvationerna uppifrån och ner EKV1, EKV2, EKV3. Vi får att EKV1+EKV2 blir

$$(5 - x + y + z) + (3 + x + y - z) = 0 \Leftrightarrow 8 + 2y = 0,$$

vilket ger $y = -4$. Insättning av detta i EKV3 ger

$$1 - 3(-4) + z = 0,$$

vilket ger $z = -13$. Insättning av $y = -4$ och $z = -13$ i EKV1 ger oss

$$5 - x - 4 - 13 = 0 \Leftrightarrow -12 - x = 0,$$

vilket ger oss $x = -12$. Så $x = -12$, $y = -4$ och $z = -13$ löser ekvationssystemet.

$$(c) \text{ Låt två krafter vara givna som } \mathbf{F}_1 = (2, -3) \text{ och } |\mathbf{F}_2| = 3, \text{ så antag att längden av krafterna } \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \text{ är 4 (l.e.). Bestäm vinkeln mellan } \mathbf{F}_1 \text{ och } \mathbf{F}_2. \quad (2p)$$

Lösning. Vi vet att cosinus av vinkeln ϕ mellan $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$ ges av formeln $\frac{\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2}{|\mathbf{F}_1||\mathbf{F}_2|}$. Vi vet också att

$$|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2|^2 = |\mathbf{F}_1|^2 + 2\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 + |\mathbf{F}_2|^2,$$

så att vi har

$$\frac{1}{2}(|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2|^2 - |\mathbf{F}_1|^2 - |\mathbf{F}_2|^2) = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2.$$

Från vad som är givet har vi $|\mathbf{F}_2|^2 = 3^2 = 9$, $|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2|^2 = 4^2 = 16$ och $|\mathbf{F}_1|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$. Detta ger

$$\frac{1}{2}(|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2|^2 - |\mathbf{F}_1|^2 - |\mathbf{F}_2|^2) = \frac{1}{2}(16 - 13 - 9) = -3.$$

Detta ger att $\cos \phi = \frac{\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2}{|\mathbf{F}_1||\mathbf{F}_2|} = \frac{-3}{3 \cdot \sqrt{13}} = -\sqrt{\frac{1}{13}}$. Detta ger $\phi = \arccos\left(-\sqrt{\frac{1}{13}}\right)$.

$$4. (a) \text{ Beräkna exakt } \cos(v) \text{ och } \sin(v) \text{ om } \tan(v) = 2\sqrt{2}, \text{ och } v \text{ ligger i den 3:e kvadranten.} \quad (2p)$$

Lösning. Vi har $\tan^2 v + 1 = \frac{\sin^2 v}{\cos^2 v} + \frac{\cos^2 v}{\cos^2 v} = \frac{1}{\cos^2 v}$. Så vi kan räkna ut $(2\sqrt{2})^2 + 1 = 8 + 1 = 9$, så att $\cos^2 v = \frac{1}{9}$. Då vi är i 3:e kvadranten, så är både sinus och cosinus negativa. Det ger $\cos v = -\frac{1}{3}$. Vi får sen $\sin v = -\sqrt{1 - \cos^2 v} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{\sqrt{8}}{3}$

$$(b) \text{ Lös ekvationen } 2z - \frac{2}{z} = -i. \text{ Skriv svaren på formen } x + yi. \quad (3p)$$

Lösning. Till och börja med, så multiplicerar vi ekvationen med $\frac{z}{2}$, så att den sätts i form

$$z^2 - 1 = \frac{i}{2}z \Leftrightarrow z^2 - \frac{i}{2}z - 1 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger att

$$0 = z^2 - \frac{i}{2}z - 1 = \left(z - \frac{i}{4}\right)^2 - \left(\frac{i}{4}\right)^2 - 1 = \left(z - \frac{i}{4}\right)^2 + \frac{1}{16} - 1 = \left(z - \frac{i}{4}\right)^2 - \frac{15}{16}.$$

Detta ger

$$\left(z - \frac{i}{4}\right)^2 = \frac{15}{16},$$

så att vi får lösningar $z = \frac{i}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}$ och $z = \frac{i}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}$.

- (c) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ så att $(\sqrt{3} - i)e^{i2x}$ är ett reellt tal. Svaret kan ges antingen i grader eller i radianer.

(3p)

Lösning. Vi löser i Radianer. Vi börjar med att skriva $(\sqrt{3} - i)$ i polär form. Vi har $|\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$. Vi har sen

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}},$$

där det sista följer av standardvärden på vinklar. Så $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Detta ger

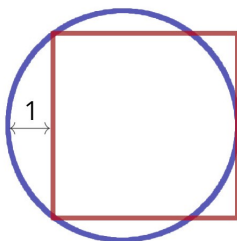
$$(\sqrt{3} - i)e^{i2x} = 2e^{i(2x - \frac{\pi}{6})}.$$

Detta talet är reellt om $e^{i(2x - \frac{\pi}{6})} = 1$ eller $e^{i(2x - \frac{\pi}{6})} = -1$. Det vill säga, $2x - \frac{\pi}{6}$ är antagligen en udda multipel av π eller en jämn multipel av π . Följaktligen har vi att $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi$, för något $k \in \mathbb{Z}$. Löser vi ut detta för x får vi att reella lösningar ges av

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Överbetygsdelen

1. En kvadrat och en cirkel har relation enligt bild (d.v.s två av kvadratens hörn ligger på cirkeln, dess en sidan tangerar cirkeln, och skillnaden i längd mellan cirkelns diameter och kvadratens sida är 1)



Beräkna kvadratens area.

(6p)

Lösning. Vi antar först att cirkeln har radie 1, d.v.s. att vi är i enhetscirkeln. Vi ser först att höjden på kvadraten ges av: om ϕ är vinkeln korresponderande till punkten på enhetscirkeln där det övre vänstra hörnet ligger, så har vi att höjden är $2 \sin \phi$. Vi ser också att basen på triangeln kan skrivas m.h.a. ϕ , då den är $1 - \cos \phi$ (då cosinus är negativ på vänstra sidan). Då höjden är detsamma som basen, så får vi ekvationen

$$2 \sin \phi = 1 - \cos \phi.$$

Kvadrering av båda sidorna ger

$$4 \sin^2 \phi = 1 - 2 \cos \phi + \cos^2 \phi \Leftrightarrow 4(1 - \cos^2 \phi) = 1 - 2 \cos \phi + \cos^2 \phi.$$

Arrangerar vi om termerna får vi ekvationen

$$5 \cos^2 \phi - 2 \cos \phi - 3 = 0.$$

Gör vi ersättningen $x = \cos \phi$, så ser vi att vi får andragradsekvationen

$$5x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Vi kan lösa denna med abc metoden, eller pq (om vi delar med 5). Vi får lösningarna

$$\frac{1}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{3}{5}} = \frac{1}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)} = \frac{1}{5} \pm \frac{4}{5}.$$

Detta ger att $\cos \phi$ måste vara en av dessa talen. Men på grund av att $\cos \phi$ är negativ, så kan vi utesluta $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$. Detta ger att $\cos \phi = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$. Detta ger att kvadratens sida i enhetscirkeln är $1 - \cos \phi = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$. För att ta reda på längden på den ursprungliga kvadratens sida, så måste vi ändra proportionerna så att vi får att skillnaden mellan kvadratens sida och cirkelns diameter blir 1, som enligt bild. I enhetscirkeln är denna längd $1 + \cos \phi = \frac{2}{5}$, så vi måste dela allt med detta för att få rätt proportioner. Framför allt blir den ursprungliga kvadratens sida $(\frac{2}{5})^{-1} \frac{8}{5} = \frac{8}{2} = 4$, så att arean är $4^2 = 16$.

2. Lös ekvationen $z^2 - 5z + 9 = \bar{z}$. (Där $\bar{z} = x - yi$ är det komplexa konjugatet av $z = x + yi$). (6p)

Lösning. Vi sätter in $z = x + yi$, där x, y är reella tal. Ekvationen blir då

$$(x + yi)^2 - 5(x + yi) + 9 = x - yi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi - 5x - 5yi + 9 = x - yi \Leftrightarrow$$

$$x^2 - y^2 - 6x + 9 + (-4y + 2xy)i = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 5x + 9 + (-4 + 2x)yi = 0.$$

För vi ska ha likhet, så måste både real-delen och imaginär-delen var lika med 0. Från denna observation ser vi att en lösning $z = x + yi$ uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6x + 9 = 0, & \text{EKV1} \\ (-4 + 2x)y = 0, & \text{EKV2.} \end{cases}$$

EKV2 har lösningar $y = 0$, och $x = 2$. Om vi sätter in $y = 0$ i EKV1, så får vi

$$0 = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2,$$

vilket ger $x = 3$. Om vi antar att $x = 2$, så blir EKV1

$$0 = 2^2 - y^2 - 6 \cdot 2 + 9 = 1 - y^2,$$

vilket ger $y = 1$ eller $y = -1$. Sätter vi $z = x + yi$, så ser vi att vi har lösningar $2 + i$, $2 - i$ och 3 .

3. Båt A startar i $(3, 1)$ och rör sig med konstant hastighetsvektor $(3, 4)$. Båt B startar i $(-2, 0)$ och rör sig med konstant hastighetsvektor $(4, 3)$. Då navigatörerna på båtarna är kompetenta, så krockar de inte med varandra. Men vid vilken tidpunkt t är de som närmast? (6p)

Lösning. Båt A's position tiden t ges av $(3, 1) + t(3, 4) = (3 + 3t, 1 + 4t)$ och båt B's position tiden t ges av $(-2, 0) + t(4, 3) = (-2 + 4t, 3t)$. Avståndet mellan dem vid tiden t är då

$$|(3 + 3t, 1 + 4t) - (-2 + 4t, 3t)| = |(5 - t, 1 + t)| = \sqrt{(5 - t)^2 + (1 + t)^2}$$

Vi vill hitta tiden t när detta avstånd är så litet som möjligt. Då avståndet alltid är positiv, så kan vi lika gärna minimera kvadraten av avståndet, d.v.s. uttrycket $(5 - t)^2 + (1 + t)^2$. Expanderar vi detta, och sedan kvadratkompletterar, så får vi

$$25 - 10t + t^2 + 1 + 2t + t^2 = 26 - 8t + 2t^2 = 2(13 - 4t + t^2) =$$

$$2(13 - 4 + (2 + t)^2) = 2(9 + (t - 2)^2).$$

Från det sista uttrycket $2(9 + (t - 2)^2)$, så ser vi, då $(t - 2)^2 > 0$ om inte $t = 2$, att uppenbarligen så måste avståndet minimeras i tiden $t = 2$.