

Tentamen

MVE335 Matematik 1 för Sjöingenjörer

2026-01-08, 08.30 – 12.30

tel: 031-772 12 44 (Exam: Olof Giselsson)

Hjälpmedel: bif. formelblad, Chalmersgodkänd räknare.

För betyg 3 krävs 20 poäng på godkäntdelen. För betyg 4 krävs 33 poäng totalt, varav minst 6 poäng på överbetygsdelen. För betyg 5 krävs 42 poäng poäng totalt, varav minst 12 poäng på överbetygsdelen.

Bonuspoäng från introkurs HT25, och duggor räknas med på godkäntdelen.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkäntdelen

1. (a) Bestäm alla reella tal x sådana att $|x - 3| < |x + 4|$. (2p)

Lösning. Kvadrerar vi båda sidorna av olikheten, så får vi $|x - 3|^2 < |x + 4|^2$, vilket, då $|t|^2 = t^2$ för alla $t \in \mathbb{R}$, ger att vi ekvivalent har $(x - 3)^2 < (x + 4)^2$. Bryter vi ut kvadraterna, så får vi

$$x^2 - 6x + 9 < x^2 + 8x + 16 \Leftrightarrow 0 < 14x + 7 \Leftrightarrow 0 < 7(2x + 1).$$

Delar vi båda sidorna med 7 i den sista olikheten, så får vi ekvivalent

$$0 < 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x,$$

d.v.s. alla reella tal större än $\frac{1}{2}$.

- (b) Förenkla uttrycket

$$\frac{\frac{1}{d+c} + \frac{1}{d-c}}{\frac{1}{d-c} - \frac{1}{d+c}}$$

så långt som möjligt.

Lösning. Vi tar först och hanterar täljaren och nämnaren i den yttre kvoten för sig

$$\begin{aligned} \frac{1}{d+c} + \frac{1}{d-c} &= \frac{d-c}{d^2-c^2} + \frac{d+c}{d^2-c^2} = \frac{2d}{d^2-c^2}, \\ \frac{1}{d-c} - \frac{1}{d+c} &= \frac{d+c}{d^2-c^2} - \frac{d-c}{d^2-c^2} = \frac{2c}{d^2-c^2}. \end{aligned}$$

Från detta, så får vi att kvoten blir

$$\frac{\left(\frac{2d}{d^2-c^2}\right)}{\left(\frac{2c}{d^2-c^2}\right)} = \frac{\left(\frac{2}{d^2-c^2}\right)d}{\left(\frac{2}{d^2-c^2}\right)c} = \frac{d}{c}.$$

(c) Bestäm konstanter b, c så att

$$x^2 + 3x = (x + b)^2 + c, \quad \text{för alla } x.$$

(2p)

Lösning. Om vi utvecklar HL, så blir ekvationen

$$x^2 + 3x = x^2 + 2bx + b^2 + c \Leftrightarrow 0 = (2b - 3)x + b^2 + c.$$

Detta ger $2b = 3 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$ och sen $c = -b^2 = -\frac{9}{4}$.

2. (a) Lös ekvationen $\sqrt{x} = 1 + \sqrt{2x - 3}$.

(3p)

Lösning. Vi kan börja med att notera att vi måste ha $2x - 3 \geq 0$, då vi annars inte kan ta kvadratroten av uttrycket. Detta ger $x \geq \frac{3}{2}$. Vi kvadrerar båda sidorna av ekvationen, så att

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2\sqrt{2x - 3} + (\sqrt{2x - 3})^2 = 1 + 2x - 3 + 2\sqrt{2x - 3} = 2x - 2 + 2\sqrt{2x - 3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 - x = 2\sqrt{2x - 3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Notera att VL i (1) är negativt om $x \geq 2$. Då HL är positivt, tvingas $x \leq 2$, vilket ger vi måste ha $2 \geq x \geq \frac{3}{2}$. Kvadrerar vi igen, får vi

$$(2 - x)^2 = 4(2x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 8x - 12 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 16 = 0.$$

Den sista ekvationen har lösningarna $6 \pm \sqrt{20} = 2(3 \pm \sqrt{5})$, där båda rötterna är större än $\frac{3}{2}$ (detta kan motiveras m.h.a. räknare eller kalkylering). Vi har även $2(3 - \sqrt{5}) \leq 2$, (kan motiveras med räknare eller $2(3 - \sqrt{5}) \leq 2(3 - \sqrt{4}) = 2$). Vi har däremot $2(3 + \sqrt{5}) > 2$, så att endast $2(3 - \sqrt{5})$ är en lösning till ekvationen.

(b) Ni vet att ekvationen $x^3 + 6x^2 - 8x - 7 = 0$ har minst en lösning när x är ett heltal. Bestäm samtliga lösningar.

(3p)

Lösning. Vi har en ekvation med heltalskoefficienter, där den ledande koefficienten är 1, så alla heltalslösningar måste dela den konstanta termen d.v.s. 7. Delare är 1, -1, 7, -7. Vi testar dessa

$$\begin{aligned} 1^3 + 6(1)^2 - 8(1) - 7 &= 1 + 6 - 8 - 7 = -8 \neq 0, & (x = 1), \\ (-1)^3 + 6(-1)^2 - 8(-1) - 7 &= -1 + 6 + 8 - 7 = 6 \neq 0, & (x = -1), \\ (7)^3 + 6(7)^2 - 8(7) - 7 &= 343 + 294 - 56 - 7 = 637 - 63 = 574 \neq 0, & (x = 7), \\ (-7)^3 + 6(-7)^2 - 8(-7) - 7 &= -343 + 294 + 56 - 7 = -350 + 350 = 0, & (x = -7). \end{aligned}$$

Så -7 är ett nollställe. Detta ger att $x + 7$ delar polynomet $x^3 + 6x^2 - 8x - 7$. Vi använder liggande stolen för att dividera

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 1 \\ x + 7 \overline{) x^3 + 6x^2 - 8x - 7} \\ \underline{-x^3 - 7x^2} \\ -x^2 - 8x \\ \underline{x^2 + 7x} \\ -x - 7 \\ \underline{x + 7} \\ 0 \end{array}$$

Så $x^3 + 6x^2 - 8x - 7 = (x + 7)(x^2 - x - 1)$, och de resterande lösningar är då lösningarna till $x^2 - x - 1 = 0$, vilka då $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$, ges av $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ och $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (alt. använd PQ-formeln).

- (c) En linje som går igenom $(0, 1)$, är vinkelrät mot linjen genom punkterna $(4, -1)$ och $(-2, 1)$. Bestäm i vilken punkt den skär en annan linje som ges av $y = 4x - 1$.

(3p)

Lösning. Riktningsskoefficienten på linjen genom $(4, -1)$ och $(-2, 1)$, ges av

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - (-1)}{-2 - 4} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

Riktningsskoefficienten till en linje vinkelrät mot $y = kx + m$ ges av $-\frac{1}{k}$, vilket i vårt fall blir $-\frac{1}{(-\frac{1}{3})} = 3$. Detta ger $y = 3x + m$, där sen m bestäms genom att linjen ska gå igenom $(0, 1)$, så att $1 = 3 \cdot 0 + m = m$. Skärningen ges nu av

$$3x + 1 = y = 4x - 1 \Rightarrow 2 = x \Rightarrow y = 3 \cdot 2 + 1 = 7,$$

vilket ger att skärningen sker i $(2, 7)$.

3. (a) Bestäm radien på cirkeln i $\mathbb{R}^2$ som går igenom punkterna $(1, 3)$, $(2, 6)$ och $(2, 8)$.

(3p)

Lösning. Låt (a, b) vara mittpunkten i cirkeln och R dess radie. Med detta kan vi skriva ekvationssystemet

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (3-b)^2 = R^2, & (EKV1), \\ (2-a)^2 + (6-b)^2 = R^2, & (EKV2), \\ (2-a)^2 + (8-b)^2 = R^2, & (EKV3). \end{cases}$$

Ersätter vi $EKV3$ med $EKV3' = EKV3 - EKV2$, så får vi det nya systemet

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (3-b)^2 = R^2, & (EKV1), \\ (2-a)^2 + (6-b)^2 = R^2, & (EKV2), \\ (8-b)^2 - (6-b)^2 = 0, & (EKV3'). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + (3-b)^2 = R^2, & (EKV1), \\ (2-a)^2 + (6-b)^2 = R^2, & (EKV2), \\ 4(7-b) = 0, & (EKV3'). \end{cases}$$

Vi ser att vi har $b = 7$. Ersätter vi $EKV2$ med $EKV2' = EKV2 - EKV1$, får vi nu

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (3-b)^2 = R^2, & (EKV1), \\ (2-a)^2 - (1-a)^2 + (6-b)^2 - (3-b)^2 = 0, & (EKV2'), \\ 4(7-b) = 0, & (EKV3'). \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (3-b)^2 = R^2, & (EKV1), \\ 30 - 2a - 6b = 0, & (EKV2'), \\ 4(7-b) = 0, & (EKV3'). \end{cases}$$

Låter vi $b = 7$ i $EKV2'$, får vi

$$30 - 2a - 6 \cdot 7 = 0 \Leftrightarrow 2a = -12 \Leftrightarrow a = -6.$$

Vi får nu från $EKV1$ $R^2 = (1+6)^2 + (3-7)^2 = 49 + 16 = 65$, vilket ger $R = \sqrt{65}$.

- (b) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 3 \\ 2x - 3y &= 4 \end{cases} \quad (3p)$$

Lösning. Vi eliminerar z från EKV2, genom att subtrahera EKV1, så att

$$3x + 2y + z - (x + y + z) = 3 - 1 \Leftrightarrow 2x + y = 2.$$

Vi löser sen systemet

$$\begin{cases} 2x + y &= 2 \\ 2x - 3y &= 4 \end{cases}.$$

Subtraherar vi (i det nya systemet) andra ekvationen från den första, så får vi

$$(2x + y) - (2x - 3y) = 2 - 4 \Leftrightarrow 4y = -2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

Vi får sen från EKV3 att

$$2x - 3\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow 2x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Sätter vi in detta i EKV1, så får vi

$$\underbrace{\left(\frac{5}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)}_{=\frac{3}{4}} + z = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{4}.$$

Sammanfattat, så blir lösningen $x = \frac{5}{4}$, $y = -\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{4}$.

(c) Visa att för två planvektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, så gäller parallelogramlagen

$$2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2.$$

(3p)

Lösning. Från reglerna för skalärprodukter kan vi räkna ut

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) + \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 + 2(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2,$$

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) + \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 - 2(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2.$$

Adderar vi de två raderna, så får vi

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2.$$

4. (a) Beräkna exakt $\tan(v)$ och $\cos(v)$ om $\sin(v) = \frac{3}{5}$, och v ligger i den 2:a kvadranten. (2p)

Lösning. Trigonometriska ettan ger $1 = \sin^2 v + \cos^2 v = \frac{9}{25} + \cos^2 v$, så att $\cos^2 v = \frac{16}{25}$, vilket ger $|\cos v| = \frac{4}{5}$. Då v ligger i 2:a kvadranten, där $\cos v \leq 0$, vilket ger $\cos v = -\frac{4}{5}$. Vi får sen

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

- (b) Låt $\omega = 1 - \frac{1}{1-i\sqrt{3}}$. Skriv ω^6 i formen $a + ib$. (3p)

Lösning. Vi skriver först ω i formen $a + ib$, och sen i polär form

$$\omega = 1 - \frac{1}{1-i\sqrt{3}} = 1 - \left(\frac{1}{1-i\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{1+i\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Vi får då

$$\omega^6 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^6 \left(e^{-i\frac{\pi}{6}} \right)^6 = \frac{27}{64} (e^{6(-i\frac{\pi}{6})}) = \frac{27}{64} (e^{-i\pi}) = -\frac{27}{64}.$$

- (c) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$, så att $\tan x = \tan 6x$. Ni kan lösa problemet antagligen i grader eller radianer. (3p)

Lösning. Lösningen ges i radianer. Vi har $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ och $\tan(6x) = \frac{\sin(6x)}{\cos(6x)}$. Multiplicerar vi båda sidorna med $\cos x \cos(6x)$ så blir den

$$\cos(6x) \sin x = \sin(6x) \cos x \Leftrightarrow \sin(6x) \cos x - \cos(6x) \sin x = 0.$$

m.h.a. trigonometriska formeln $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$, så kan vi skriva det sista som

$$\sin(6x - x) = \sin(5x) = 0,$$

vilket ger $5x = \pi k$, för $k \in \mathbb{Z}$. Detta ger $x = \frac{\pi}{5}k$, för $k \in \mathbb{Z}$. Notera att för inga sådana x har vi $\cos x = 0$, eller $\cos(6x) = 0$, så vi har inte infört några nya lösningar genom vår multiplikation.

Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkänt.

1. Bestäm alla tal a , så att linjen $y = 1 + a(x+1)$ är en tangent till $-x^2 + 4x - 2$. (6p)

Lösning. Riktningsskoefficienten till tangenten till $f(x) = x^2 + 4x - 2$ i punkten $x = t$ ges av derivatan $f'(t) = 2t + 4$. Då linjen ska gå genom punkten $(x, f(x))$, så får vi att tangentens till kurvan $y = f(x)$ i punkten t ges av ekvationen

$$y = f'(t)(x-t) + f(t) = (-2t+4)(x-t) + (-t^2+4t-2).$$

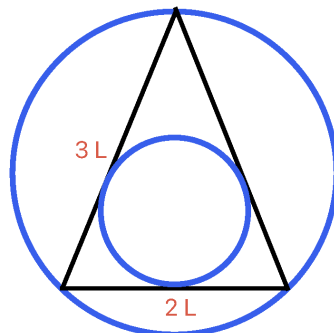
Linjerna $y = 1 + a(x+1)$ är precis de linjer i planet som går igenom $(-1, 1)$ (och som inte är parallella med y -axeln), och a är deras riktningskoefficient. Detta ger att vi söker precis de tangenter som går igenom $(-1, 1)$, d.v.s

$$1 = f'(t)(-1-t) + f(t) = (-2t+4)(-1-t) + (-t^2+4t-2) = t^2 + 2t - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t - 7 = 0 \stackrel{\text{(kvadratkanplettering)}}{\Leftrightarrow} (t+1)^2 = 8,$$

vilket har lösningar $t_1 = -1 + \sqrt{8}$ och $t_2 = -1 - \sqrt{8}$. De eftersökta a är då precis $f'(t_1) = 2 + 2\sqrt{8}$ och $f'(t_2) = 2 - 2\sqrt{8}$.

2. En likbent triangel har proportioner som nedan (långa sidornas längd är 3 L, kortsidans längd är 2 L).



Den lilla cirkeln C_{li} tangerar sidorna till triangeln, och den stora cirkeln C_{st} går igenom triangelns hörn. Bestäm förhållandet

$$\frac{Area(C_{st})}{Area(C_{li})}.$$

(6p)

Lösning. Låt α vara vinkeln i de båda lägre hörnen och $\beta = 180 - 2\alpha$ vara vinkeln i det över hörnet. Vi låter den lilla cirkelns radie betecknas med r_{li} . Då den mindre cirkeln tangerar triangelns sidor, så kommer varje sida att vara en tangent till cirkeln, vilket betyder att linjen från mittpunkten på C_{li} till kanten är vinkelrät mot sidan. Detta ger att r_{li} är höjden på de tre olika trianglar T_1, T_2, T_3 som finns med hörn i T . Dessa tre trianglar blir tillsammans T , så att jämförelse av areor ger

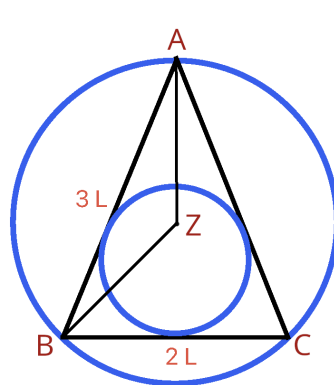
$$Area(T_1) + Area(T_2) + Area(T_3) = Area(T) \Rightarrow$$

$$\frac{r_{li} * 3L}{2} + \frac{r_{li} * 3L}{2} + \frac{r_{li} * 2L}{2} = \frac{3L * 2L}{2} = 3L^2 \Rightarrow$$

$$r_{li} * 4L = 3L^2 \Rightarrow$$

$$r_{li} = \frac{3}{4}L.$$

Låt den stora cirkelns radie betecknas med r_{st} . Låt Z betecknar mittpunkten på den stora cirkeln. Vi döper hörnen i triangeln A,B,C. Notera att i triangeln ABC , så är $\alpha = \angle ABC$, och $\cos \alpha = \frac{L}{3L} = \frac{1}{3}$.



Triangeln AZB är en likbent triangel med ena sidan längd $|AB| = 3L$ och de båda andra $|AZ| = |ZB| = r_{\text{st}}$. Vi har vinkeln $\angle ZAB = \frac{\beta}{2} = 90 - \alpha$. Reglerna för sinus, samt att triangeln AZB är likbent, ger

$$\cos(\angle ZAB) = \frac{|AZ|}{(|AB|/2)},$$

från vilket vi får

$$\frac{3}{2}L = \cos(90 - \alpha)r_{\text{st}} = \sin(\alpha)r_{\text{st}},$$

och vi vet från trigonometriska ettan att $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$. Detta ger

$$\frac{3}{2}L = \sin(\alpha)r_{\text{st}} = \frac{\sqrt{8}}{3}r_{\text{st}} \Rightarrow r_{\text{st}} = \frac{9}{2\sqrt{8}}L.$$

Då $\text{Area}(C_{\text{li}}) = \pi r_{\text{li}}^2$ och $\text{Area}(C_{\text{st}}) = \pi r_{\text{st}}^2$, så blir förhållandet

$$\frac{\text{Area}(C_{\text{st}})}{\text{Area}(C_{\text{li}})} = \frac{r_{\text{st}}^2}{r_{\text{li}}^2} = \frac{(\frac{9}{2\sqrt{8}}L)^2}{(\frac{3}{4}L)^2} = \frac{\frac{81}{32}}{\frac{9}{16}} = \frac{9}{2}$$

3. Bestäm alla $z \in \mathbb{C}$ så att $z^2 + \frac{1}{z^2}$ är reellt (d.v.s. imaginärdelen är 0). Rita mängden i talplanet. (6p)

Lösning. Notera först att i ekvationen måste vi utesluta $z = 0$ från lösningsmängden, då den innehåller en $1/z^2$ -term (vi kan inte dela med 0!). Så vi kan anta att $z \neq 0$. Vi sätter in $z = x + iy$, där $x, y \in \mathbb{R}$. Vi räknar ut

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

$$\frac{1}{(x + iy)^2} = \frac{(x - iy)^2}{(x + iy)^2(x - iy)^2} = \frac{(x - iy)^2}{|x + iy|^4} = \frac{1}{|x + iy|^4} (x^2 - y^2 - 2ixy) = \frac{x^2 - y^2}{|x + iy|^4} - i \frac{2xy}{|x + iy|^4}.$$

Om talet är reellt, så är imaginärdelen 0. Då vi ser from ovan uträkning att imaginärdelen av

$$(x + iy)^2 + \frac{1}{(x + iy)^2}$$

är

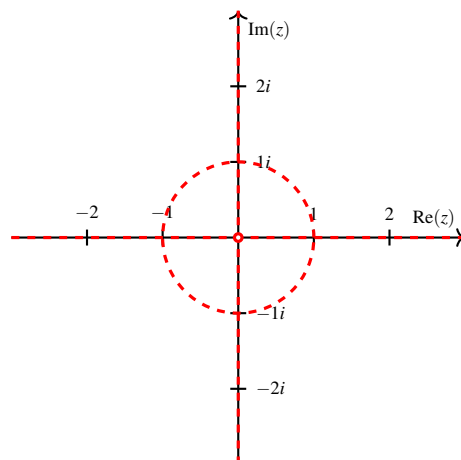
$$2xy - \frac{2xy}{|x + iy|^4} = \frac{2xy}{|x + iy|^4} (|x + iy|^4 - 1),$$

så den eftersökta ekvationen är alltså

$$0 = \frac{2xy}{|x + iy|^4} (|x + iy|^4 - 1) = (|x + iy| - 1) 2xy \left(\frac{(1 + |x + iy| + |x + iy|^2 + |x + iy|^3)}{|x + iy|^4} \right).$$

Från formen av det sista uttrycket, så ser vi att imaginärdelen är 0 om och endast om $2xy = 0$ eller $|x + iy| = 1$. $2xy = 0$ ger att talet antagligen ligger på den reella eller imaginära axeln (dock inte i origo $z = 0$, av tidigare nämnda skäl). $|x + iy| = 1$ betyder att talet ligger på enhetscirkeln. Vi kan rita

denna mängden i talplanet såsom (vi indikerar området med $-$)



Lycka till!

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

$$\text{Hérons formel} \quad T = \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)}$$

$$\text{Sinussatsen} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\text{Cosinussatsen} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\text{Areasatsen} \quad T = \frac{ab \sin C}{2}$$

$$\text{Arean av en ellips} = \pi ab$$

$$\text{Volymen av en ellipsoid} = \frac{4\pi abc}{3}$$

$$\text{Volymen av en cylinder} = (\text{Basarean}) \cdot (\text{höjden})$$

$$\text{Volymen av en kon} = \frac{(\text{Basarean}) \cdot (\text{höjden})}{3}$$

$$\text{Arean av en sfär} = 4\pi r^2$$

$$\text{Arean av mantelytan för en}$$

$$\text{cirkulär cylinder} = 2\pi r h$$

$$\text{cirkulär kon} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\text{Eulers formler:} \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}), \quad \sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

$$\text{de Moivres formel} \quad (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$$