

Tentamen
MVE335 Matematik 1 för Sjöingenjörer
2025-01-09 08.30–12.30

Tel vid frågor 0763056526 eller kl 10 i sal, Joakim B

Hjälpmedel: bif. formelblad, chalmersgodkänd räknare

För betyg 3 krävs 20 poäng på godkänddelen. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom totalt 33 resp 42 varav minst 6 resp 12 poäng på överbetygsdelen. Bonuspoäng från introkurs HT24 räknas med på godkänddelen.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkänddelen

1. (a) Förenkla uttrycket $\frac{(-2+h)^2 - (-2-h)^2}{2h}$ (2p)
Ange det förenklade uttryckets värde för $h = 0$.
(b) Lös ekvationen $8 - 10R - \frac{7 - 20R}{5} = 4$ (2p)
(c) Lös ekvationen $\frac{x(1+2x) - 1}{1+2x} = 1$ (2p)
(d) Lös ekvationen $\frac{x+2}{x} + \frac{4}{x(x-2)} = 10$ (2p)
2. (a) En linje har riktningskoefficient $= -2$ och går igenom punkten $(1, -3)$. (2p)
Bestäm skärningspunkten med linjen $4x + 5y = 6$.
(b) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 3 - x - 2(x + y) = 0 \\ 4 - 2y - 3(x + y) = 0 \end{cases}$ (2p)
(c) Kurvorna $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 3$ och $y = 10x^2 - 10x$ skär varandra i punkten där $x = 3$. Ange övriga skärningspunkter (x -koord). (2p)
(d) Bestäm koordinaterna för en hörnpunkt på den minsta kvadrat (axelparallell) som omsluter cirkeln $x^2 + y^2 + 4(x - 2y) = 16$. Motivera. (2p)
3. (a) Beräkna exakt $\sin(v)$ och $\cos(v)$ om $\cos(v) - 2\sin(v) = 0$ och $0^\circ < v < 90^\circ$. (2p)
(b) Beräkna $A > 0$ och φ så att $A \cos(x - \varphi) = \cos x - 2\sin x$. Ledning: Använd additionsformeln $A \cos(x - \varphi) = A \cos \varphi \cos x + A \sin \varphi \sin x$. Vinkeln φ i grader eller radianer. (2p)
(c) Givet krafterna $\mathbf{F}_1 = (-2, -2)$ och $|\mathbf{F}_2| = 6$. Kraften $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ är riktad längs y -axeln. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$. (2p)
(d) Båt A startar i $(0, 8)$ och rör sig med konstant hastighetsvektor $(-4, 3)$. En annan båt, B, startar samtidigt i $(5, -7)$ med hastighetsvektor $\mathbf{v}$. Båtarna kolliderar efter 5 timmar. Beräkna hastighetsvektorn, $\mathbf{v}$, för båt B. (Ej grafisk lösning) (2p)
4. (a) Låt $z = -2 + i\sqrt{2}$ och $w = 3 - i\sqrt{3}$. Ange z och w i polär form. (Vinklar i grader eller radianer). (2p)
(b) Ekvationssystemet $\begin{cases} a - bx - c(x + y) = 0 \\ d - ey - f(x + y) = 0 \end{cases}$ har lösningen $y = \frac{fa - (b+c)d}{fc - (b+c)(e+f)}$ (2p)
Beräkna y i polär form om $fa = 2, fc = 2 - 3i, b + c = -2i, d = 3 + i, e + f = 3 + 2i$.
(c) Givet $a = 2(\cos(25^\circ) + i\sin(25^\circ))$, $b = 1 - i$, $c = 2$, $d = -3 + i$, beräkna z om $c - dz - 2 \cdot (b - az) = 0$. Svar i polär form. (2p)
(d) Bestäm $A > 0$ och φ (grader eller radianer) så att $f(t) = Ae^{i(2t+\varphi)}$ uppfyller sambandet $3f'(t) + 8f(t) = 20e^{i2t}$ (2p)

Överbetygsdelen

För betyg 4 eller 5 krävs 20 poäng på godkäntdelen samt totalt 33 resp 42 poäng varav minst 6 resp 12 poäng på överbetygsdelen. (Poäng på överbetygsdelen räknas inte med för godkänt).

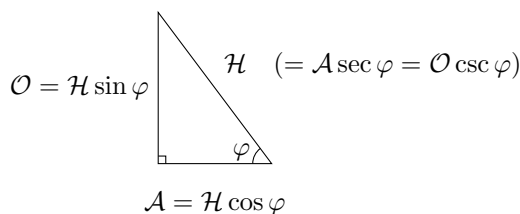
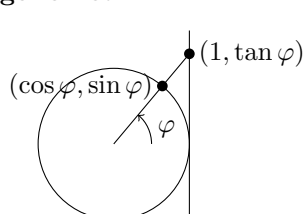
5. (a) Lös ekvationen $z^2 + 2iz^{-2} = 2 + 2i$. Svara i polär form med exakt vinkel i radianer. (3p)
(b) Lös ekvationen $4 \cos 2x \cos x \sin x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$ (3p)
6. En triangel har hörn i $A = (2, -3)$ och $B = (-4, 1)$. Bestäm koordinaterna för det tredje hörnet så att triangeln blir likbent med övriga sidor är dubbelt så långa som sidan AB . Svara exakt, ej svar innehållande trigfunktioner eller $e^{i\cdots}$. (6p)
7. Lös tredjegradsekvationen $x^3 - 3x + 1.5 = 0$ genom att göra variabelbytet $x = t + \frac{1}{t}$ (6p)
Ledning: Ekvationen i den nya t -variabeln kan reduceras till en andragradsekvation.

Formelblad Matematik 1

Algebra

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{a}{1} & -a &= (-1)a & -(-a) &= a & a-b &= a+(-b) & -c(a-b) &= -ca+cb \\
 -ab &= (-a)b = a(-b) & -\frac{a}{b} &= \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} & \begin{cases} a^2-b^2=(a-b)(a+b) \\ (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2 \end{cases} \\
 \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{ad}{bc} & \frac{a}{bg} + \frac{c}{dg} &= \frac{ad+bc}{bdg} & x^2+px+q=0 &\Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
 x^2+px &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 & ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
 \sqrt[n]{a} &= a^{1/n} & a^n a^m &= a^{n+m} & 1/a^n &= a^{-n} & (ab)^n &= a^n b^n & (a^n)^m &= a^{nm}
 \end{aligned}$$

Trigonometri



$$\begin{aligned}
 \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 & \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, & \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin(x) \\ \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(x) \end{cases} \\
 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} & \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\
 \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y & 2 \sin x \cos y &= \sin(x+y) + \sin(x-y) \\
 \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & 2 \sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\
 \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} & 2 \cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y)
 \end{aligned}$$

Geometri och vektorer

$$\begin{aligned}
 \text{Cosinussatsen } c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C & \text{Sinussatsen } \frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \\
 \text{Area triangel } T &= \frac{1}{2} ab \sin C & T &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad (\text{Heron's formel}) \\
 \text{Area: ellips} &= \pi ab, \quad \text{sfär} = 4\pi r^2, \quad \text{cylinder} = 2\pi r h, \quad \text{kon} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \\
 \text{Volym: ellipsoid} &= \frac{4}{3} \pi abc, \quad \text{cylinder} = \pi r^2 h, \quad \text{kon} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \\
 \text{Räta linjen: } y &= y_0 + k(x - x_0) & \text{Cirkel: } (x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\
 \text{Räta linjen: } P &= P_0 + t\mathbf{v} & \text{Skalarprodukt: } \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3
 \end{aligned}$$

Komplexa tal och derivata ($i = \sqrt{-1}$)

$$\begin{aligned}
 z &= x + iy, \quad z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) (+\pi \text{ om } x < 0) \\
 \text{Eulers formler: } e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}), \\
 r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} & \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} & (e^{i\varphi})^n &= e^{in\varphi} \quad (\text{de Moivre}) \\
 (\cos \omega x)' &= -\omega \sin \omega x & (\sin \omega x)' &= \omega \cos \omega x & (e^{i\omega x})' &= i\omega e^{i\omega x}
 \end{aligned}$$