Lösningsförslag till tenta 10 jan 2023 för MVE655

Uppg 1 a) $z = x^2y + xy^2$, $z(1,2) = 6$

$z'_x = 2xy + y^2$, $z'_x(1,2) = 8$

$z'_y = x^2 + 2xy$, $z'_y(1,2) = 5$

$$\underline{\underline{z = 6 + 8(x-1) + 5(y-2)}} \quad (= 8x + 5y - 12)$$

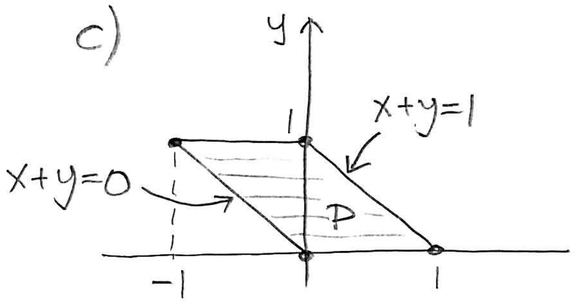
b) $\mathbb{f}(x,y) = (x^2 + y, x + y^2)$

$$\mathbb{f}'(x,y) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix}}}$$

$\mathbb{f}$ är lokalt bijektiv i en omg. av $(0,0)$

ty $\det \mathbb{f}'(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

c)



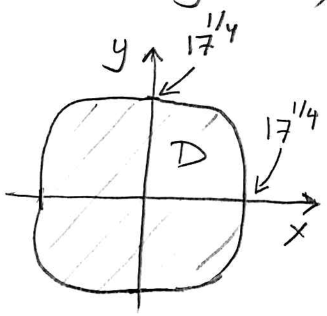
$$\iint_P \frac{1}{1+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-y}^{1-y} \frac{1}{1+y^2}\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy = \Big[\arctan y\Big]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

d) $\mathbb{r}(t) = (e^t, t)$, $0 \le t \le 1$, $\mathbb{r}'(t) = (e^t, 1)$

$$\int_C x^2\,ds = \int_0^1 \underbrace{e^{2t}}_{x^2} \underbrace{\sqrt{e^{2t}+1}}_{|\mathbb{r}'(t)|}\,dt = \left[\frac{1}{3}(e^{2t}+1)^{3/2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}\left((e^2+1)^{3/2} - 2^{3/2}\right)}}$$

Uppg 2 b) $D: x^4+y^4 \leq 17$ är kompakt så $f(x,y) = x^3+2y^3$ antar säkert ett största värde på D.



Vidare är $\nabla f = (3x^2, 6y^2) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ så $(0,0)$ är den enda stationära punkten.

Vi har $(0,0) \in D$ och $\boxed{f(0,0) = 0}$

obs! $x^4+y^4 \leq 17 \Rightarrow |x| \leq 17^{1/4}$ & $|y| \leq 17^{1/4}$

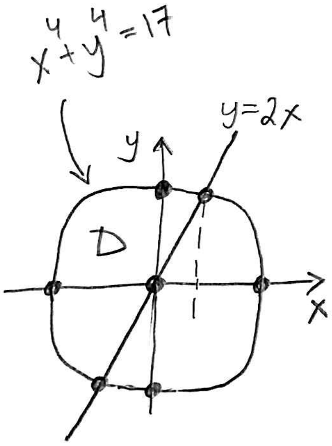
Vi behöver också bestämma möjliga extrempunkter på randen av D dvs maximum av f under bivillkoret $\underbrace{x^4+y^4}_{g(x,y)} = 17$

Sådana punkter kan finnas där ∇f och $\nabla g = (4x^3, 4y^3)$ är parallella dvs. där;

$$\begin{vmatrix} 3x^2 & 4x^3 \\ 6y^2 & 4y^3 \end{vmatrix} = 12x^2y^3 - 24x^3y^2 = 12x^2y^2(y-2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overset{①}{(x=0)} \vee \overset{②}{(y=0)} \vee \overset{③}{(y=2x)}$$

① $x=0$ insatt i bivillkoret $x^4+y^4=17$ ger $y = \pm 17^{1/4}$, och $\boxed{f(0, \pm 17^{1/4}) = \pm 2 \cdot 17^{3/4}}$



② $y=0$ insatt i bivillkoret $x^4+y^4=17$ ger $x = \pm 17^{1/4}$, och $\boxed{f(\pm 17^{1/4}, 0) = \pm 17^{3/4}}$

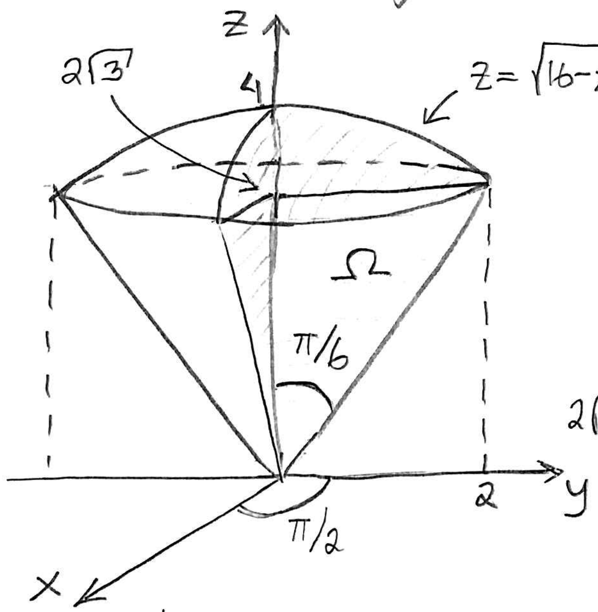
③ $y=2x$ insatt i bivillkoret $x^4+y^4=17$ ger $17x^4 = 17 \Leftrightarrow x = \pm 1$, och $\boxed{f(\pm 1, \pm 2) = \pm 17}$

Notera att $2 \cdot 17^{3/4} < 17$ ty $(2 \cdot 17^{3/4})^4 = 16 \cdot 17^3 < 17^4$ så det största av ovanstående (inrutade) möjliga extremvärden är 17 störst.

Svar: $\max\limits_{x^4+y^4 \leq 17} f(x,y) = \underline{\underline{17}}$

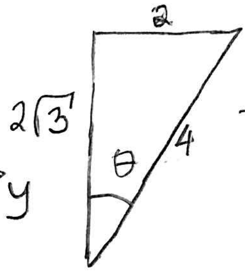
Uppg 3 b) $I=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy=\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$

där Ω är den del av klotet $x^2+y^2+z^2\leq 16$ i första kvadranten som ligger över konen $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$.



$\sqrt{16-x^2-y^2}=\sqrt{3(x^2+y^2)}\Leftrightarrow$

$x^2+y^2=4$



$\tan\theta=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$

$$I=\int_0^4\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2} r\cdot r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^4\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/6}=\underline{\underline{32\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}$$

Uppg 4 a) $\mathbb{F}=\left(\frac{1}{\sqrt{x+y^2}},\frac{2y}{\sqrt{x+y^2}}\right)$, $\underline{\underline{D: x+y^2>0}}$

$$\mathbb{F}=\nabla U\Leftrightarrow\begin{cases}U'_x=1/\sqrt{x+y^2} & (1)\\ U'_y=2y/\sqrt{x+y^2} & (2)\end{cases}$$

$(1)\Rightarrow U=2\sqrt{x+y^2}+g(y)\Rightarrow U'_y=\frac{2y}{\sqrt{x+y^2}}+g'(y)\overset{(2)}{=}\frac{2y}{\sqrt{x+y^2}}$

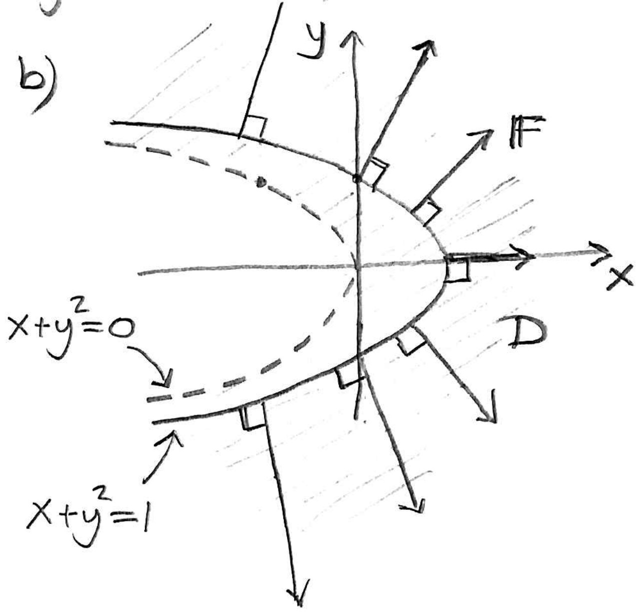
$\Rightarrow g'(y)=0\Rightarrow g(y)=C$

Detta visar att $\mathbb{F}$ är konservativt med potential $U(x,y)=2\sqrt{x+y^2}$.

forts. uppg 4a

Eftersom $U(1,0)=2$ så ges ekvipotentialkurvan γ genom $(1,0)$ av ekv. $2\sqrt{x+y^2}=2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x+y^2=1}}$

b)



c) Om $\mathcal{C}$ är röda linjestycket från $(1,0)$ till $(3,-1)$ så är; Arbetet $= \int_{\mathcal{C}} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \underbrace{U(3,-1)}_{4} - \underbrace{U(1,0)}_{2} = \underline{\underline{2}}$

<u>alt</u> $\mathcal{C}$ kan parametriseras av;

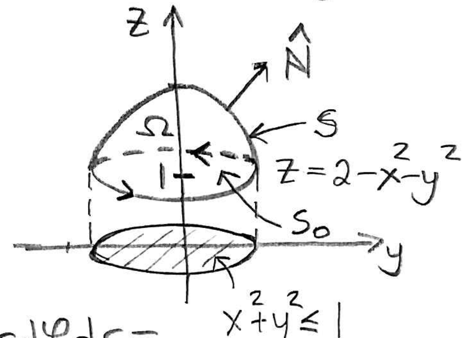
$$\mathbb{r}(t) = t(3,-1) + (1-t)(1,0) = (1+2t,-t),\ 0 \xrightarrow{t} 1$$

så; $\int_{\mathcal{C}} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{1+2t+t^2}} + \frac{2t}{\sqrt{1+2t+t^2}} \right) dt =$

$$= \int_0^1 \frac{2(1+t)}{\sqrt{(1+t)^2}} dt \underset{1+t>0}{=} \int_0^1 2\,dt = \underline{\underline{2}}$$

<u>Uppg 5</u> a) $\text{rot}\,\mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{e}_1 & \mathbb{e}_2 & \mathbb{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & x^2+y^2 \end{vmatrix} = (2y+x,\ y-2x,\ -2z)$

$$I = \iint_S \underbrace{\text{rot}\,\mathbb{F}}_{=(2y+x,\ y-2x,\ -2(2-x^2-y^2))\text{ på } S} \bullet \underbrace{\hat{\mathbb{N}}\,dS}_{(2x,\ 2y,\ 1)\,dx\,dy \text{ på } S} = \iint_{x^2+y^2\le 1} (2x^2+2y^2-2(2-x^2-y^2))\,dx\,dy$$



$$I = 4\iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2-1)\,dx\,dy \underset{\substack{\text{polär}\\ \text{subst.}}}{=} 4\int_0^1\int_0^{2\pi} (r^2-1)\,r\,d\varphi\,dr =$$

$$= 8\pi\left[\frac{r^4}{4}-\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{-2\pi}}$$

b) $$\iint_S \text{rot}\,\mathbb{F}\bullet\hat{\mathbb{N}}\,dS \underset{\substack{\text{Stokes}\\ \text{sats}}}{=} \int_{\partial S} \mathbb{F}\bullet d\mathbb{r} = \quad \mathbb{r}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ 1)$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin t,\ -\cos t,\ 1)}_{\mathbb{F}(\mathbb{r}(t))} \bullet \underbrace{(-\sin t,\ \cos t,\ 0)}_{\mathbb{r}'(t)}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\underbrace{-\sin^2 t - \cos^2 t}_{-1})\,dt = \underline{\underline{-2\pi}}$$

<u>alt</u>. $$\iint_S \text{rot}\,\mathbb{F}\bullet\hat{\mathbb{N}}\,dS \overset{\text{Gauss sats}}{=} \iiint_\Omega \text{div}(\text{rot}\,\mathbb{F})\,dV - \iint_{S_0} \underbrace{\text{rot}\,\mathbb{F}}_{(2y+x,\ y-2x,\ -2)\text{ på } S_0} \bullet \underbrace{\hat{\mathbb{N}}\,dS}_{(0,0,-1)\,dx\,dy}$$

$$= -2\iint_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy = \underline{\underline{-2\pi}}$$

Uppg 6 $\begin{cases} u = x+ky \\ v = x-ky \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=k} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=-k} = k\frac{\partial f}{\partial u} - k\frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = (3-k)\frac{\partial f}{\partial u} + (3+k)\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

Med $k=3$ får vi ; $6\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow$

$f = g(u)$, för någon deriverbar funktion $g \Rightarrow$

Allmän lösning : $f(x,y) = g(x+3y)$

$f(0,y) = g(3y) = \cos y \Rightarrow g(y) = \cos\left(\frac{y}{3}\right)$

så $f(x,y) = \cos\left(\frac{x+3y}{3}\right) = \underline{\underline{\cos\left(\frac{x}{3}+y\right)}}$

Uppg 7 a) $\left|\frac{2x^2y+y^3}{x^2+y^2}\right| = r\underbrace{|2\cos^2\varphi\sin\varphi+\sin^3\varphi|}_{\leq 3} \leq 3r \to 0$ då $r\to 0$

polära koordinater

b) $f'_v(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \frac{2v_1^2v_2+v_2^3}{v_1^2+v_2^2} = 2v_1^2v_2+v_2^3$

$v=(v_1,v_2)$ $\qquad v_1^2+v_2^2 = 1$

$|v| = \sqrt{v_1^2+v_2^2} = 1$

Spec. är $f'_x(0,0) = 0$ och $f'_y(0,0) = 1$

$(v_1,v_2)=(1,0)$ $\qquad (v_1,v_2)=(0,1)$

c) $\frac{f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)h-f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{2h^2k+k^3}{h^2+k^2}-k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$

$$= \frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}} \overset{h=k>0}{=} \frac{1}{2\sqrt{2}} \to \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0 \text{ , då } k\to 0$$

vilket visar att f inte är differentierbar i $(0,0)$