

Tentamen

MVE655, Flervariabelanalys, Globala system & IT

2024-01-10 , kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Thomas Wernstål , telefon: 3557

Hjälpmedel: Inga

För betyget 3 (godkänt) krävs minst 20 poäng (exklusive ev. bonuspoäng).

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng från duggor läsåret 23/24.

1. (a) Bestäm tangentplanet till funktionsytan $z = x^2y + xy^2$ i punkten $(1, 2)$. (2p)

(b) Bestäm funktionalmatrisen för funktionen $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y, x + y^2)$ och förklara varför funktionen är lokalt bijektiv (inverterbar) i en omgivning av $(0, 0)$. (2p)

(c) Beräkna dubbelintegralen $\iint_P \frac{1}{1 + y^2} dx dy$, där P är parallelogrammet med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ och $(-1, 1)$. (3p)

(d) Beräkna kurvintegralen $\int_C x^2 ds$, där C är den kurva som ges av parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (e^t, t)$, $0 \leq t \leq 1$. (2p)

2. (a) Formulera sats om villkor för lokala extrempunkter (dvs. villkor för att avgöra karaktären hos en stationär punkt) och ge exempel på kvadratiska former som motsvarar lokalt maximum, minimum respektive sadelpunkt. (3p)

(b) Bestäm det största värde som $f(x, y) = x^3 + 2y^3$ antar på området $x^4 + y^4 \leq 17$. (4p)

3. (a) Redogör för sambandet mellan Kartesiska koordinater och sfäriska (rymdpolära) koordinater, samt rita en figur som illustrerar den geometriska tolkningen av dessa koordinater. (2p)

(b) Beräkna $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy$. (3p)

Tips: Tolka som trippelintegral och identifiera/skissa integrationsområdet.

Beräkna sedan med lämplig substitution.

4. Betrakta fältet $\mathbf{F} = \left(\frac{1}{\sqrt{x+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x+y^2}} \right)$

(a) Bestäm definitionsområdet D för $\mathbf{F}$. Visa sedan att $\mathbf{F}$ är konservativt på D och bestäm den ekvipotentialkurva γ till $\mathbf{F}$ som går genom punkten $(1, 0)$. (3p)

(b) Skissa D och γ i samma figur, samt illustrera med pilar hur $\mathbf{F}$ verkar längs γ . (2p)

(c) Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbf{F}$ utför på en partikel som rör sig rätlinjigt från punkten $(1, 0)$ till $(3, -1)$. (2p)

5. Betrakta $\mathbf{F} = (yz, -xz, x^2 + y^2)$ och låt S vara den del av ytan $z = 2 - x^2 + y^2$ där $z \geq 1$.

Beräkna ytintegralen $\iint_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$, där $\hat{\mathbf{N}}$ är uppåtriktade enhetsnormaler, genom ...

(a) direkt användning av definitionen av ytintegral. (3p)

(b) att använda lämplig sats (som inkluderar annan typ av integral) (3p)

VÄND!

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen $3\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ som uppfyller $f(0, y) = \cos y$ (5p)

Tips: Gör variabelbytet $\begin{cases} u = x + ky \\ v = x - ky \end{cases}$, där k är en konstant, och välj k på lämpligt sätt.

7. Betrakta funktionen $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y+y^3}{x^2+y^2} & , \quad \text{då } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad \text{då } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Visa att $f(x, y)$ är kontinuerlig i $(0, 0)$. (2p)

(b) Visa att riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(0, 0)$ existerar i alla riktningar $\mathbf{v}$. (2p)

(c) Visa att $f(x, y)$ inte är differentierbar i $(0, 0)$. (2p)

8. (a) Vad menas med att en yta är *orienterad*? (1p)

(här efterfrågas en matematisk definition, som i kursboken)

(b) Ange och motivera formeln för area av parametriserad yta. (4p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för MVE655, läsåret 23/24

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.