Lösningsförslag till tenta 4 april på MVE655

Uppg 1 a) $\left.\dfrac{x^2}{x^2+y^4}\right|_{x=0} = 0 \to 0$

$\neq$ ↖ olika gränsvärden längs olika linjer in mot origo. ↙

$\left.\dfrac{x^2}{x^2+y^4}\right|_{y=0} = 1 \to 1$

b) Eftersom $\left.\frac{\partial}{\partial z}(x^2y + xz + y^2e^z)\right|_{(x,y,z)=(1,1,0)} = 2 \neq 0$

så följer av Implicita funktionssatsen att ekvationen definierar z som funktion av x och y, lokalt kring punkten $(1,1,0)$.
Implicit derivering m.a.p. x ger vidare att;

$2xy + z + xz_x' + y^2e^z z_x' = 0$

och spec. i punkten $(1,1,0)$ får vi;

$2 + 2z_x'(1,1) = 0$ så; $\underline{\underline{z_x'(1,1) = -1}}$

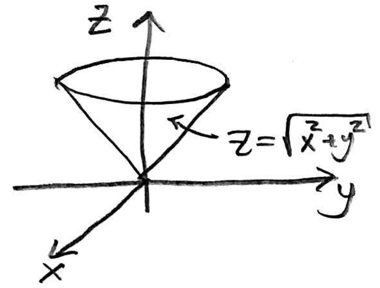
c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}g\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$$\left.\begin{aligned} f_x' &= \frac{-1}{2x\sqrt{xy}}g\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y\sqrt{xy}}g'\left(\frac{x}{y}\right) \\ f_y' &= \frac{-1}{2y\sqrt{xy}}g\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2\sqrt{xy}}g'\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$xf_x' + yf_y' + f = \frac{-1}{2\sqrt{xy}}g\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2\sqrt{xy}}g\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{\sqrt{xy}}g\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

d) $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2+v^2})$, $u^2+v^2 \le 1$

är parametrisering av en kon.



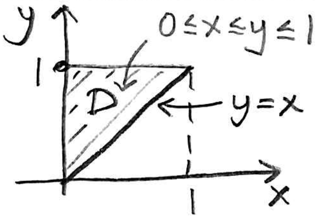
Vidare är;

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = \left|\left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)\right| = \sqrt{2}$$

så $$\iint_S x^2\,dS = \sqrt{2}\iint_{u^2+v^2\le 1} u^2\,du\,dv \underset{\text{symmetri}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{u^2+v^2\le 1}(u^2+v^2)\,du\,dv \underset{\text{polärsubst.}}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\,d\varphi\,dr = \sqrt{2}\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}}$$

<u>Uppg 2</u> $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 + 4x - y$



a) $f'_x = 2x - 3y + 4$, $f'_y = -3x + 2y - 1$

Spec. är $\nabla f(1,2) = (0,0)$

dvs. $(1,2)$ är en stationär punkt.

Vidare är $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = -3$, $f''_{yy} = 2$

så motsvarande kvadratiska form i $(1,2)$ är;

$$Q(h,k) = 2h^2 - 6hk + 2k^2 = 2\left(\left(h - \tfrac{3}{2}k\right)^2 - \tfrac{5}{4}k^2\right)$$

som är indefinit, vilket visar att $f(x,y)$ har en sadelpunkt i $(1,2)$.

b) $\begin{cases} f'_x = 2x - 3y + 4 = 0 \\ f'_y = -3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ har bara lösn. $(1,2) \notin D$.

ty systemet är linjärt och $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \ne 0$.

så det finns inga stat. punkter i D.

Vi undersöker nu de tre randbitarna:

$R_1: x=0, 0<y<1$; $f(0,y)=\underbrace{y^2-y}_{g_1(y)}$, $g_1'(y)=2y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$

$g(\frac{1}{2})=\frac{-1}{4}$

$R_2: y=1, 0<x<1$; $f(x,1)=\underbrace{x^2+x}_{g_2(x)}$, $g_2'(x)=2x+1=0 \Leftrightarrow$

$x=\frac{-1}{2}\notin(0,1)$.

$R_3: y=x, 0<x<1$, $f(x,x)=\underbrace{-x^2+3x}_{g_3(x)}$, $g_3'(x)=-2x+3 \Leftrightarrow$

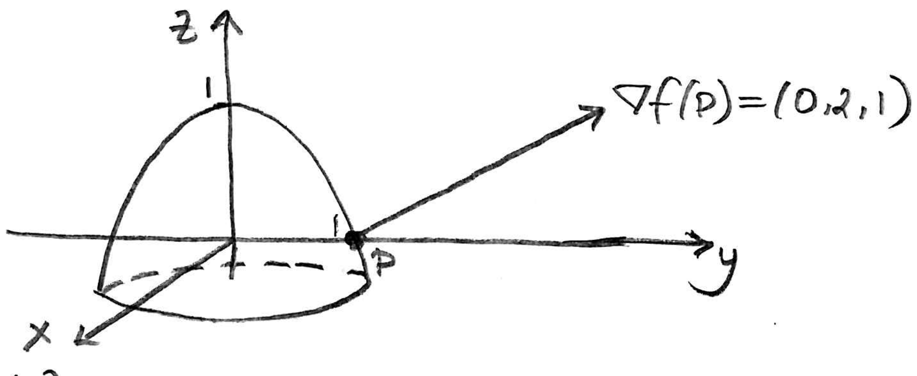
$x=\frac{3}{2}\notin(0,1)$

"Hörnen": $f(0,0)=0$, $f(0,1)=0$, $f(1,1)=2$

Svar: Funktionens största värde på D är $\underline{\underline{2}}$ och det minsta är $\underline{\underline{\frac{-1}{4}}}$.

Uppg 3 a) $\nabla f(P)=(2x,2y,1)\Big|_{(0,1,0)}=\underline{\underline{(0,2,1)}}$

$f(P)=1$ och nivåytan $x^2+y^2+z=1$ är en paraboloid.

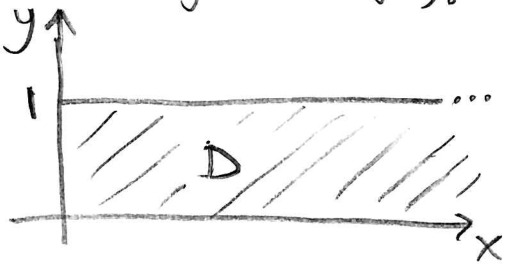


b) $v=\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)$

$$\frac{f(P+hv)-f(P)}{h}=\frac{(1+\frac{2h}{\sqrt{5}})^2+\frac{h}{\sqrt{5}}-1}{h}=\sqrt{5}+\frac{4}{5}h\xrightarrow{\text{då } h\to 0}\underline{\underline{\sqrt{5}}}=f_v'(P)$$

alt. $f_v'(P)=|\nabla f(P)|=\sqrt{5}$

Uppg 4 a) Integralen är generaliserad för att integrationsområdet D är obegränsat, och för $\alpha<0$ dessutom p.g.a. att integranden är obegränsad (i en punkterad omg. till origo).



b) $$I=\iint_D x(x^2+y^2)^{\alpha}\,dx\,dy \underset{\uparrow}{=}$$
noterа att integranden är ≥ 0 på D

$$=\int_0^1\left(\int_0^\infty x(x^2+y^2)^{\alpha}\,dx\right)dy \underset{\alpha\neq -1}{=} \int_0^1\left[\frac{1}{2(\alpha+1)}(x^2+y^2)^{\alpha+1}\right]_0^\infty dy$$

$$\underset{\alpha<-1}{=} \frac{-1}{2(\alpha+1)}\int_0^1 y^{2\alpha+2}\,dy \underset{\alpha\neq\frac{-3}{2}}{=} \frac{1}{2(\alpha+1)}\left[\frac{1}{2\alpha+3}y^{2\alpha+3}\right]_0^1 \underset{\alpha>\frac{-3}{2}}{<}\infty$$

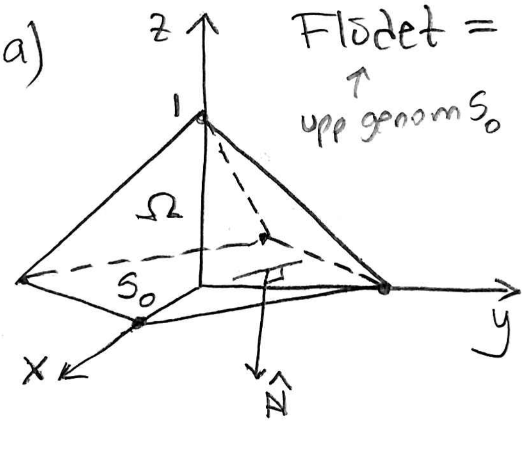
Av kalkylerna framgår också att integralen är divergent då $\alpha\leq\frac{-3}{2}$ eller $\alpha>-1$, och för $\alpha=-1$ får vi;

$$I=\int_0^1\left(\int_0^\infty \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\right)dy=\int_0^1\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]_0^\infty dy=\infty$$

så integralen är konvergent för $\underline{\underline{-\frac{3}{2}<\alpha<-1}}$

Uppg 5 a)

$\mathbb{F}=(x,y,e^z)$



$$\text{Flödet} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{upp genom } S_0}}{=} \iint_{S_0} \mathbb{F}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\(0,0,1)}}{\hat{N}}\,dS=\iint_D dx\,dy = \underline{\underline{2}}$$

$(x,y,1)$ på S_0

arean av D

$D: |x+y|\leq 1, |x-y|\leq 1$

$S_0: (x,y)\in D, z=0$

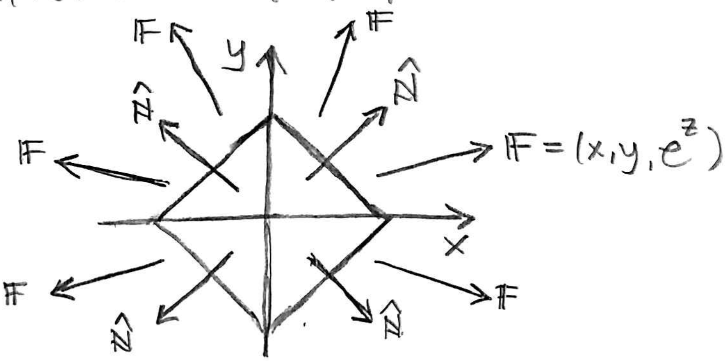
b) Flödet genom den sidoyta S_1 där $x \geq 0, y \geq 0$ är;

$$\iint_{S_1} \mathbb{F} \bullet \underbrace{\hat{N} dS}_{(1,1,1)dxdy} = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y+e^{1-x-y}) dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(x+y)^2 - e^{1-x-y} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(1-x^2) - 1 + e^{1-x} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{-1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - e^{1-x} \right]_0^1 = \underline{\underline{e - \frac{5}{3}}}$$

Av symmetriskäl är flödet ut genom de andra sidoytorna lika stort. Sett uppifrån har flödet och normalvektorerna följande riktningar;



alt. Det totala flödet ut ur pyramiden är;

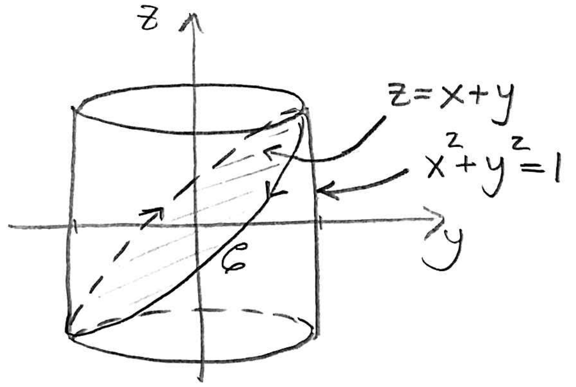
$$\iint_{\partial\Omega} \mathbb{F} \bullet \hat{N} dS \underset{\text{Gauss sats}}{=} \iiint_\Omega \underbrace{\operatorname{div} \mathbb{F}}_{2+e^z} dV = 2 \underbrace{\iiint_\Omega dV}_{\text{Volymen av } \Omega} + \iiint_\Omega e^z dV \underset{\text{skivformeln}}{=}$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \int_0^1 e^z (1-z)^2 dz = \frac{4}{3} + 2\left[e^z((1-z)^2 + 2(1-z) + 2) \right]_0^1 = 4e - \frac{26}{3}$$

så flödet ut genom var och en av de fyra sidoytorna är;

$$\frac{1}{4}\Big(\underbrace{4e - \frac{26}{3}}_{\text{totala flödet}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{flödet genom } S_0}}{2} \Big) = \underline{\underline{e - \frac{5}{3}}}$$

Uppg 6



$\mathbb{F}=(y,-x,y-x)$

a) $\mathcal{C}: \mathbb{r}(t)=(\cos t, \sin t, \cos t+\sin t)$, $2\pi \xrightarrow{t} 0$

$$\mathbb{r}'(t)=(-\sin t, \cos t, \cos t-\sin t)$$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}(t))=(\sin t, -\cos t, \sin t-\cos t)$$

$\mathcal{C}$ är en fältlinje till $\mathbb{F}$ ty $\mathbb{r}'(t)=-\mathbb{F}(\mathbb{r}(t))$.

Anm. Vi kan också i detta fall ta fram alla fältlinjer men det var inget som efterfrågades. I så fall löser vi;

$$\frac{dx}{y} \overset{①}{=} \frac{dy}{-x} \overset{②}{=} \frac{dz}{y-x}$$

① $\Leftrightarrow x\,dx=-y\,dy \Leftrightarrow x^2+y^2=C$ ③

② $\Leftrightarrow \left(1-\frac{y}{x}\right)dy=dz \overset{③}{\Leftrightarrow} \left(1-\frac{\pm y}{\sqrt{C-y^2}}\right)dy=dz$

$\Leftrightarrow \left(y\pm\sqrt{C-y^2}\right)=z+C \overset{③}{\Leftrightarrow} z=x+y+D$

Så fältlinjerna är alla skärningskurvor mellan cylindrar $x^2+y^2=C$ och plan $z=x+y+D$

b) Arbetet $=\int_{\mathcal{C}} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}=\int_{2\pi}^{0} \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot\mathbb{r}'(t)\,dt=$

$$=\int_{2\pi}^{0}\left(-\sin^2 t-\cos^2 t-(\cos t-\sin t)^2\right)dt=$$

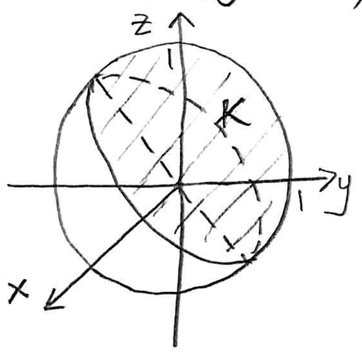
$$=\int_{2\pi}^{0}(2\cos t\sin t-2)=\underline{\underline{4\pi}}$$

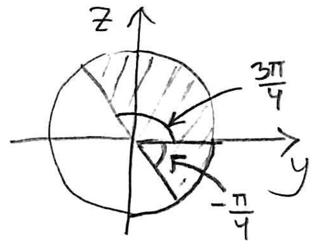
alt. $$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = -\iint_S \underbrace{\text{rot}\,\mathbb{F}}_{(1,1,-2)}\cdot \underbrace{\hat{N}\,dS}_{(-1,-1,1)dxdy} = \iint_{x^2+y^2\le 1} 4\,dxdy = \underline{\underline{4\pi}}$$

Stokes sats

den plana ellipsskiva vars rand är C

p.g.a. orienteringen





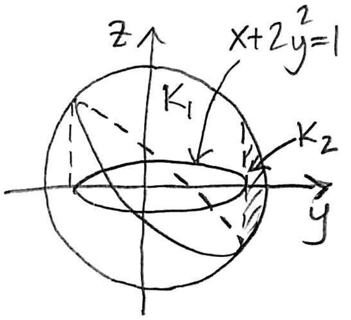
uppg 7 b) Sfärisk subst. enl. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$ ger;

$$\iiint_K z\,dV = \int_0^1 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{\pi} r\sin\theta\sin\varphi\, r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1}_{1/4} \underbrace{\left[-\cos\varphi\right]_{-\pi/4}^{3\pi/4}}_{\sqrt{2}} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta}_{\pi/2} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

alt. Notera att $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow x^2+2y^2=1$

så om vi delar upp K i två delar, dels den del K_1 där $x^2+2y^2\le 1$ och resten K_2 så är;

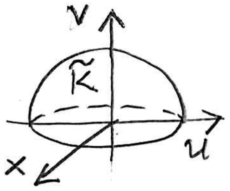


$$\iiint_K z\,dV = \iiint_{K_1} z\,dV + \underbrace{\iiint_{K_2} z\,dV}_{=0} =$$

$$= \iint_{x^2+2y^2\le 1} \left(\int_{-y}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz \right) dxdy = \frac{1}{2} \iint_{x^2+2y^2\le 1} (1-x^2-2y^2)\,dxdy =$$

$$= \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} (1-r^2)\frac{r}{\sqrt{2}}\,d\varphi\, dr = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4\sqrt{2}}}}$$

alt. Vi kan också rotera K så att den passar bättre för sfäriska koordinater på vanlig sätt och får då;



$$\iiint_K z\,dV = \left[\begin{cases} x = x \\ u = \frac{1}{\sqrt{2}}(z-y) \\ v = \frac{1}{\sqrt{2}}(z+y) \end{cases} \middle| \ \frac{\partial(x,u,v)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -1 \right] =$$

$$= \iiint_{\tilde K} \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)\,du\,dv\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint v\,du\,dv\,dx = \left[\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ u = r\sin\theta\sin\varphi \\ v = r\cos\theta \end{cases} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r\cos\theta\, r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr = \dots = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

alt. Notera att $I = \iiint_K z\,dV = \underset{\uparrow}{z_T} \iiint_K dV = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{z}_T \iiint_{\tilde K} dV =$

tyngdpunktens z-koordinat

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\tilde K} z\,dV =$$

$$\begin{bmatrix} y_T \\ z_T \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\text{rotationsmatris för rotation med } \frac{\pi}{4}.} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{z}_T \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r\cos\theta\, r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr = \dots = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4}}}$$