

Tentamen

MVE655, Flervariabelanalys, Globala system & IT

2024-04-04 , kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Thomas Wernstål , telefon: 3557

Hjälpmedel: Inga

För betyget 3 (godkänt) krävs minst 20 poäng (exklusive ev. bonuspoäng).

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng från duggor läsåret 23/24.

1. (a) Visa att gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^4}$ inte existerar. (2p)
(b) Visa att ekvationen $x^2y + xz + y^2e^z = 2$, lokalt kring punkten $(1, 1, 0)$, implicit definierar z som funktion av x och y , samt bestäm $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$ (3p)
(c) Visa att $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}g(\frac{x}{y})$, $x > 0, y > 0$, löser den partiella differentialekvationen;
$$xf'_x + yf'_y + f = 0$$
 (2p)
(d) Beskriv den yta $\mathcal{S}$ som ges av parametriseringen $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$, $u^2 + v^2 \leq 1$, och beräkna ytintegralen $\iint_{\mathcal{S}} x^2 dS$. (3p)
2. Låt $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 + 4x - y$
(a) Visa att funktionen $f(x, y)$ har en sadelpunkt i $(1, 2)$. (2p)
(b) Bestäm största och minsta värde av $f(x, y)$ i området $0 \leq x \leq y \leq 1$. (3p)
3. (a) Bestäm gradienten av $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ i punkten $P = (0, 1, 0)$. Skissa sedan denna gradient (som en pil) i samma figur som nivåytan till $f(x, y, z)$ genom P . (2p)
(b) Med f och P som i deluppgift (a) beräkna riktningsderivatan av $f(x, y, z)$ i punkten P i gradientens riktning. För att erhålla 2 poäng skall definitionen av riktningsderivata användas. Andra sätt ger 1 poäng. (2p)
(c) Visa att riktningsderivatan av en funktion $f(x, y, z)$ i en punkt är maximal i gradientens riktning. (2p)
4. Betrakta dubbelintegralen $\iint_D x(x^2 + y^2)^\alpha dx dy$, där $D : x \geq 0, 0 \leq y \leq 1$.
(a) Av vilket/vilka skäl är integralen att betrakta som generaliserad, för olika värden på α . (2p)
(b) Bestäm de α för vilket integralen är konvergent (4p)
5. Låt $\mathbf{F} = (x, y, e^z)$ och låt Ω vara pyramiden vars bas har hörn i $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ och där toppen är i $(0, 0, 1)$.
(a) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom pyramidens kvadratiska botten (välj riktning själv). (2p)
(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom pyramidens övriga fyra sneda sidoytor (välj riktning själv). (4p)

VÄND!

6. Låt $\mathbf{F} = (y, -x, y - x)$ och låt $\mathcal{C}$ vara skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $z = x + y$, orienterad medurs sett ovanifrån.

(a) Visa att $\mathcal{C}$ är en fältlinje till fältet $\mathbf{F}$ (3p)

(b) Beräkna det arbete kraftfältet $\mathbf{F}$ uträttar på en partikel som rör sig ett varv runt $\mathcal{C}$. (3p)

7. (a) Formulera sats om variabelsubstitution i trippelintegraler. (2p)

(b) Beräkna trippelintegralen $\iiint_K z \, dx \, dy \, dz$, där K är den del av klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ där $y + z \geq 0$ (ett halvklot). (4p)

8. (a) Förklara vad som menas med en *enkel*, *sluten* och *orienterad* kurva. (2p)

(b) Ange och motivera formeln för längden av parametriserad kurva. (3p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för MVE655, läsåret 23/24

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.