

Tentamen

MVE655, Flervariabelanalys, Globala system & IT

2024-08-19 , kl. 14.00 - 18.00

Examinator: Thomas Wernstål , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Thomas Wernstål , telefon: 3557

Hjälpmedel: Inga

För betyget 3 (godkänt) krävs minst 20 poäng (exklusive ev. bonuspoäng).

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng från duggor läsåret 23/24.

1. (a) Beskriv och skissa på det geometriska objekt som utgör lösningsmängden till systemet;

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = y + 1 \end{cases} \quad (2p)$$

- (b) Uttryck $\frac{d^2}{ds^2}f(s^2, s)$ i de partiella derivatorna av f . (2p)

- (c) Bestäm linjäriseringen i punkten $(1, -3, 2)$ för den funktion $f(x, y, z)$ från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ som ges av $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 + z, \ln(y + z^2), xyz)$. Använd sedan linjäriseringen för att bestämma ett approximativt värde på $\mathbf{f}(1.02, -2.99, 1.98)$. (3p)

- (d) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x^2 + 2y^2) dx dy$, där D är ellipsskivan $x^2 + 2y^2 \leq 4$. (3p)

2. (a) Definiera begreppet *lokal maximipunkt* för en reellvärd funktion av n variabler. (1p)

- (b) Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2y - 12x^2 - 3y^2$ och avgör om f har lokalt min, max eller sadelpunkt i dessa punkter. (4p)

- (c) Har $f(x, y)$ i deluppgift (b) något globalt maximum på sin definitionsmängd $D_f = \mathbb{R}^2$? (motivera ditt svar!) (1p)

3. Visa att volymen av ett klot B med radie R är $\frac{4}{3}\pi R^3$ på följande tre olika sätt;

- (a) Beräkna $\iiint_B dV$ genom att göra sfärisk substitution. (3p)

- (b) Beräkna $\iiint_B dV$ genom att göra cylindrisk substitution. (3p)

- (c) Beräkna $\iiint_B dV$ genom en enkelintegral av dubbelintegraler (skivformeln). (3p)

4. Låt $\mathcal{C}$ vara den del av hyperbeln $x^2 - y^2 = 3$ där $x > 0$ och $-1 \leq y \leq 1$.

- (a) Parametrisera kurvan $\mathcal{C}$ och uttryck bågelementet ds i den valda parametern. (2p)

- (b) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} 2xy dx + (x^2 - y^2) dy$, då $\mathcal{C}$ är orienterad från $(2, 1)$ till $(2, -1)$. (3p)

5. Beräkna det totala flödet av fältet $\mathbf{F} = (e^{y+z}, \frac{x}{\sqrt{z}}e^{xy^2\sqrt{z}}, 1)$ ut ur rätblocket

$$K : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 4). \quad (4p)$$

6. (a) Formulera sats om villkor för extrempunkt av en funktion $f(x, y)$ under ett bivillkor $g(x, y) = C$. (2p)
- (b) Bestäm den/de punkter på kurvan $3x^2 - 2xy + y^2 = 20$ som ligger närmast origo, och bestäm detta avstånd. (4p)
7. Låt $\mathcal{S}$ vara ytan som parametriseras av $\mathbf{r}(u, v) = (uv, u^2 - v, u + v^2)$. Visa att man lokalt kring punkten $(2, 3, 3)$ kan betrakta $\mathcal{S}$ som grafen till en funktion av x och y dvs. $z = z(x, y)$, och bestäm de partiella derivatorna $\frac{\partial z}{\partial x}$ och $\frac{\partial z}{\partial y}$ av denna funktion. (4p)
8. (a) Definiera och härled/motivera begreppet *normalytintegral* som flöde (dvs. ytintegral över vektorfält) (3p)
- (b) Visa att varje konservativt vektorfält är virvelfritt, samt ge exempel på ett vektorfält som är virvelfritt men inte konservativt. (3p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för MVE655, läsåret 23/24

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.