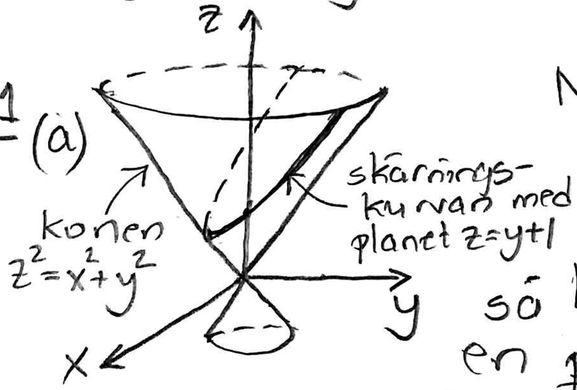
Lösningsförslag till tenta 19 aug 2024

Uppg 1 (a)



Notera att $\begin{cases} z^2 = x^2+y^2 \\ z = y+1 \end{cases} \Rightarrow$

$(y+1)^2 = x^2+y^2 \Leftrightarrow 2y+1 = x^2$

så lösningsmängden beskriver en <u>parabel</u> i planet $z=y+1$. (en typ av kägelsnitt)

(b) $$\frac{d^2}{ds^2}f(s^2,s) = \frac{d}{ds}\left(2s f_x'(s^2,s) + f_y'(s^2,s)\right) = 2f_x'(s^2,s) +$$

$$+2s\left(2s f_{xx}''(s^2,s) + f_{xy}''(s^2,s)\right) + 2s f_{yx}''(s^2,s) + f_{yy}''(s^2,s) =$$

$$= \underline{\underline{2f_x'(s^2,s) + 4s^2 f_{xx}''(s^2,s) + 4s f_{xy}''(s^2,s) + f_{yy}''(s^2,s)}}$$

(c) $\mathbf{f}(x,y,z) = (x^2+z, \ln(y+z^2), xyz)$

$$D\mathbf{f}(1,-3,2) = \left.\begin{bmatrix} 2x & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{y+z^2} & \frac{2z}{y+z^2} \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}\right|_{(1,-3,2)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{L[\mathbf{f},(1,-3,2)](x,y,z) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y+3 \\ z-2 \end{bmatrix}}}$$

$$\mathbf{f}(1.02,-2.99,1.98) \approx L[\mathbf{f},(1,-3,2)](1.02,-2.99,1.98) =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.01 \\ -0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.07 \\ -0.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.02 \\ -0.07 \\ -6.04 \end{bmatrix}$$

så $\mathbf{f}(1.02,-2.99,1.98) \approx \underline{\underline{(3.02,-0.07,-6.04)}}$

(d)

$$\iint\limits_{x^2+2y^2\le 4} (x^2+2y^2)\,dx\,dy = \left[\begin{cases} x=\sqrt{2}\,r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \middle| \ \frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \sqrt{2}\,r \right] =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} 2r^2 \cdot r\,d\varphi\,dr = 4\pi\sqrt{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = \underline{\underline{4\pi\sqrt{2}}}$$

<u>Uppg 2</u> (b) $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2y - 12x^2 - 3y^2$

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2 - 6xy - 24x = 0 \\ f'_y = -3x^2 - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-y-4) = 0 & (1) \\ x^2 + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow$ $x=0$ eller $x-y=4$

<u>$x=0$</u> i ekv. (2) ger $y=0$
så $(0,0)$ är en stat. punkt.

<u>$x-y=4$</u> i ekv. (2) ger $x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow x=-1\pm 3$
så $(-4,-8)$ och $(2,-2)$ är stat. punkter.

Vidare är $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x-6y-24 & -6x \\ -6x & -6 \end{bmatrix}$

och spec. är;

$\det \mathcal{H}(0,0) = \begin{vmatrix} -24 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} > 0$ och $f''_{xx}(0,0) < 0$ så
<u>$(0,0)$ är en lokal maxpunkt.</u>

$\det \mathcal{H}(-4,-8) = \begin{vmatrix} -24 & 24 \\ 24 & -6 \end{vmatrix} < 0$ så

<u>$(-4,-8)$ är en sadelpunkt</u>

$\det \mathcal{H}(2,-2) = \begin{vmatrix} 12 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} < 0$ så

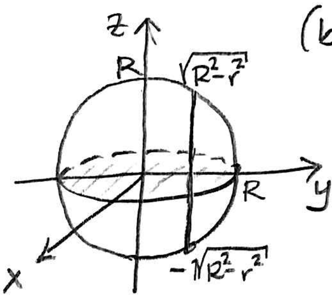
<u>$(2,-2)$ är en sadelpunkt</u>

(c) $f(x,y)$ har inget globalt maximum på $D_f = \mathbb{R}^2$ ty

t.ex. är $f(x,0) = 2x^3 - 12x^2 = \underbrace{x^2}_{\to\infty}\underbrace{(2x-12)}_{\to\infty} \to \infty$, då $x \to \infty$.

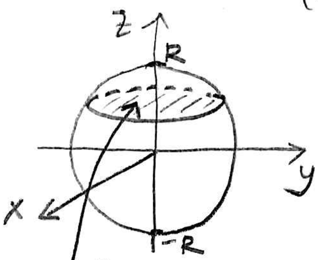
<u>Uppg 3</u> (a) $$\iiint_B dV = \left[\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}\right] = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr =$$

$$= 2\pi \left[-\cos\theta\right]_0^\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$$



(b) $$\iiint_B dV = \left[\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}\right] = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} r \, dz \, d\varphi \, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R 2r\sqrt{R^2-r^2} \, dr = 2\pi \left[-\frac{2}{3}(R^2-r^2)^{3/2}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

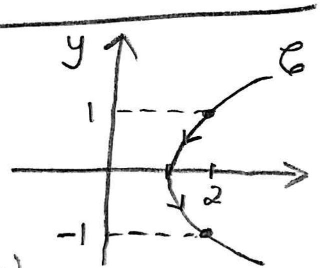


$D_z: x^2+y^2 \le R^2 - z^2$

(c) $$\iiint_B dV = \int_{-R}^R \left(\iint_{x^2+y^2 \le R^2-z^2} dx\,dy \right) dz = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) \, dz =$$

$$= \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-R}^R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

<u>Uppg 4</u> $\mathcal{C}: x^2 - y^2 = 3, \ x > 0, \ -1 \le y \le 1$



(a) $\mathcal{C}$ kan t.ex. parametriseras med

$\underline{\mathbf{r}(t) = (\sqrt{3+t^2}, t), \ 1 \xrightarrow{t} -1}$ och då är

$$ds = |\mathbf{r}'(t)| \, dt = \sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{3+t^2}}\right)^2 + 1^2} \, dt = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3+2t^2}}{\sqrt{3+t^2}} dt}}$$

(b) Med parametriseringen i (a) får vi;

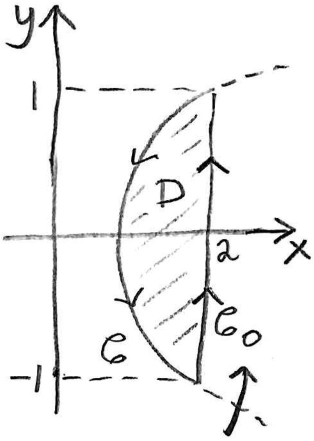
$$\int_{\mathcal{C}} 2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy = \int_1^{-1} \left(2\sqrt{3+t^2}\,t\,\frac{t}{\sqrt{3+t^2}} + 3\right)dt =$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^3 + 3t\right]_1^{-1} = \frac{-11}{3} - \frac{11}{3} = \underline{\underline{\frac{-22}{3}}}$$

alt. Notera att $\mathbb{F} = (2xy, x^2-y^2)$ är konservativt med potential $U(x,y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$ så

$$\int_{\mathcal{C}} 2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy = U(2,-1) - U(2,1) = \frac{-11}{3} - \frac{11}{3} = \underline{\underline{\frac{-22}{3}}}$$

alt. Greens formel ger;



$\mathbb{r}(t) = (2,t),\ -1 \overset{t}{\nearrow} 1$

$$\int_{\mathcal{C}} 2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy)\right)}_{=0} dx\,dy -$$

$$- \int_{\mathcal{C}_0} 2xy\,\underbrace{dx}_{=0} + (x^2-y^2)\,dy = -\int_{-1}^{1}(4-t^2)\,dt = -\left[4t - \frac{t^3}{3}\right] = \underline{\underline{\frac{-22}{3}}}$$

Uppg 5 Gauss sats ger;

$$\text{Flödet} = \iint_{\partial K} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbb{F}\,dV =$$

$$= \iiint_K 2x^2ye^{xy^2\sqrt{z}}\,dV = \int_0^1\int_1^4\int_0^1 2x^2ye^{xy^2\sqrt{z}}\,dy\,dz\,dx =$$

$$= \int_0^1\int_1^4 \left[\frac{x}{\sqrt{z}}e^{xy^2\sqrt{z}}\right]_0^1 dz\,dx = \int_0^1\int_1^4 \left(\frac{x}{\sqrt{z}}e^{x\sqrt{z}} - \frac{x}{\sqrt{z}}\right)dz\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[2e^{x\sqrt{z}} - 2x\sqrt{z}\right]_1^4 dx = 2\int_0^1 (e^{2x} - e^{x} - x)\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^{x} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{e^2 - 2e}}$$

<u>alt.</u> Vi kan också beräkna flödet genom var och en av de sex sidoytorna och addera;

$$\iint_{\partial K} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iint_{\substack{R_1 \\ x=0}} \mathbb{F}\cdot \underset{(-1,0,0)}{\hat{N}}\,dS + \iint_{\substack{R_2 \\ x=1}} \mathbb{F}\cdot \underset{(1,0,0)}{\hat{N}}\,dS + \iint_{\substack{R_3 \\ y=0}} \mathbb{F}\cdot \underset{(0,-1,0)}{\hat{N}}\,dS + \iint_{\substack{R_4 \\ y=1}} \mathbb{F}\cdot \underset{(0,1,0)}{\hat{N}}\,dS +$$

$$+ \iint_{\substack{R_5 \\ z=1}} \mathbb{F}\cdot \underset{(0,0,-1)}{\hat{N}}\,dS + \iint_{\substack{R_6 \\ z=4}} \mathbb{F}\cdot \underset{(0,0,1)}{\hat{N}}\,dS = \underbrace{-\int_0^1\int_1^4 e^{y+z}\,dz\,dy + \int_0^1\int_1^4 e^{y+z}\,dz\,dy}_{=0} -$$

$$- \int_0^1\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{z}}\,dz\,dx + \int_0^1\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{z}} e^{x\sqrt{z}}\,dz\,dx \underbrace{- \int_0^1\int_0^1 dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 dx\,dy}_{=0} =$$

$$= \int_0^1\int_1^4 \left(\frac{x}{\sqrt{z}}e^{x\sqrt{z}} - \frac{x}{\sqrt{z}}\right)dz\,dx = \underset{\text{se ovan}}{\cdots} = \underline{\underline{e^2 - 2e}}$$

<u>uppg 6</u> (b) Vi vill minimera $f(x,y) = x^2 + y^2$ under bivillkoret $\underbrace{3x^2 - 2xy + y^2}_{g(x,y)} \underset{①}{=} 4$. Detta inträffar i en punkt där $\nabla f = (2x, 2y)$ och $\nabla g = (6x-2y, 2y-2x)$ är parallella dvs. där;

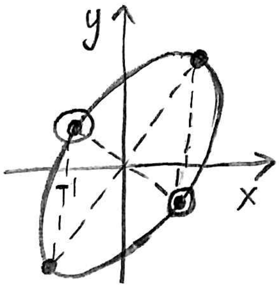
$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 6x-2y & 2y-2x \end{vmatrix} = -4x^2 - 8xy + 4y^2 \underset{②}{=} 0$$

Multiplicerar vi båda led i bivillkoret ① med 4 och subtraherar från motsvarande led i ② så får vi;

$$16x^2=16 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

Med dessa värden på x insatt i ② får vi;

$$-4 \mp 8y+4y^2=0 \Leftrightarrow y=\pm 1 \pm \sqrt{2}$$



Vi har $f(\pm 1, \pm 1 \pm \sqrt{2}) > f(\pm 1, \pm 1 \mp \sqrt{2}) =$

$= 1+(1-\sqrt{2})^2 = 4-2\sqrt{2}$

så de punkter på (ellipsen) $3x^2-2xy+y^2=4$ som ligger närmast origo är $\underline{\underline{(1, 1-\sqrt{2})}}$ och $\underline{\underline{(-1, \sqrt{2}-1)}}$ och detta avstånd är $\underline{\underline{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}}$

Alt. (för den intresserade) Vi vill minimera $\|\mathbf{x}\|^2$ under bivillkoret $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \overset{①}{=} 4$, där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ och

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Stationära punkter till Lagrangefunktionen;

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \|\mathbf{x}\|^2 + \lambda(\mathbf{x}^T A \mathbf{x} - 4)$$

uppfyller $\quad \mathbf{x} - \lambda A \mathbf{x} \overset{②}{=} \mathbf{0} \quad$ ty

$$\nabla(\|\mathbf{x}\|^2) = 2\mathbf{x} \quad \& \quad \nabla(\mathbf{x}^T A \mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$$

② ger att $\frac{1}{\lambda}$ är egenvärde till A, som enkelt kan beräknas till $2+\sqrt{2}$ och $2-\sqrt{2}$.

Om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ motsvarande egenvektorer som dessutom uppfyller ① så får vi;

$$\mathbf{x}_i^T A \mathbf{x}_i = \frac{1}{\lambda_i} \|\mathbf{x}_i\|^2 = 4 \Rightarrow \|\mathbf{x}_i\| = 2\sqrt{\lambda_i}$$

Minst värde på $\|\mathbf{x}_i\|$ blir $2\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{2}}} = \underline{\underline{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}}$

Av ovan kan vi också bestämma motsvarande egenvektorer $\mathbf{x}_i$ som uppfyller ①

Uppg 7 Vi börjar med att bestämma u,v för vilket $\mathbf{r}(u,v) = (2,3,3)$;

$$\begin{cases} uv = 2 & (1) \\ u^2 - v = 3 & (2) \\ u + v^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

(1) ger $v = \frac{2}{u}$ som insatt i (2) och (3) ger;

$$\begin{cases} u^2 - \frac{2}{u} = 3 \\ u + \frac{4}{u^2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 - 2 = 3u & (4) \\ u^3 + 4 = 3u^2 & (5) \end{cases}$$

(5)-(4) ger $6 = 3u^2 - 3u \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1 \pm 3}{2}$

Från uppg. framgår att $u \geq 0$, vilket ger oss lösningen $u = 2$, $v = 1$, så $\mathbf{r}(2,1) = (2,3,3)$.

Vidare är;

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v' = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v & 2u & 1 \\ u & -1 & 2v \end{vmatrix} = (4uv+1, u-2v^2, -v-2u^2)$$

och spec. för $u=2, v=1$ är $\mathbf{N} = (9, 0, -9)$

Eftersom normalvektorns z-koordinat är $\neq 0$ så beskriver S, lokalt kring $(2,3,3)$ en funktionsyta $z = z(x,y)$. Vidare ges tangentplanet till ytan i $(2,3,3)$ av;

$$9(x-2) + 0 \cdot (y-3) - 9(z-3) = 0 \Leftrightarrow z = x+1$$

Speciellt avläser vi från denna ekvation att;

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,3) = 1 \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(2,3) = 0$$

alt. Med $F_1(x,y,z,u,v) = uv - x$.

$$F_2(x,y,z,u,v) = u^2 - v - y$$

$$F_3(x,y,z,u,v) = u + v^2 - z$$

så är S lösningen på ES; $F_1 = F_2 = F_3 = 0$

och $\dfrac{d(F_1,F_2,F_3)}{d(u,v,z)} = \begin{vmatrix} v & u & 0 \\ 2u & -1 & 0 \\ 1 & 2v & -1 \end{vmatrix} = v + 2u^2 \underset{\substack{\uparrow \\ u=2,\, v=1}}{=} 9 \neq 0$

så Implicita funktionssatsen (sid 208) ger att systemet ovan definierar u, v, z som funktioner av x, y, lokalt kring $(x,y) = (2,3)$.

Vidare ger kedjeregeln att;

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & u \\ 2u & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{-1}{v+2u^2} \begin{bmatrix} 1 & 2v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -u \\ -2u & v \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{v+2u^2} \begin{bmatrix} 1+4uv & u-2v^2 \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ u=2,\, v=1}}{=} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

så $\frac{\partial z}{\partial x}(2,3) = 1$ och $\frac{\partial z}{\partial y}(2,3) = 0$.

Anm. Implicita funktionssatsen i sin fulla form ger också att (står inte i denna bok);

$$\frac{\partial(u,v,z)}{\partial(x,y)} = -\left(\frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(u,v,z)}\right)^{-1} \frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y)} \underset{\substack{\uparrow \\ u=2,\, v=1}}{=}$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 9 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

varur vi spec. avläser att;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{9}{9} = 1 \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{0}{9} = 0$$