

Tentamen

MVE655, Flervariabelanalys, Globala system & IT

2025-01-15 , kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Thomas Wernstål , telefon: 3557

Hjälpmedel: Inga

För betyget 3 (godkänt) krävs minst 22 poäng (inklusive ev. bonuspoäng från dugga 2,4 & 6 läsåret 24/25).

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 32 resp. 42 poäng (inklusive ev. bonuspoäng från duggorna 1,3 & 5).

1. (a) Bestäm normallinjen till ytan $xyz = 6$ genom punkten $(1, 2, 3)$. (2p)

- (b) Bestäm den lösning $u(x, y)$ på den partiella differentialekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$ som uppfyller villkoren $u(x, 1) = x$ och $u(1, y) = y^2$. (2p)

- (c) Låt $f(x, y)$ vara differentierbar och $F(r, \varphi) = f(x, y)$, där $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. Visa då att;

$$|\nabla f|^2 = (F'_r)^2 + \left(\frac{F'_\varphi}{r}\right)^2 \quad (3p)$$

- (d) Beräkna $\iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^1 e^{z^2} dz \right) dx dy$, där $D : x^2 + y^2 \leq 1$. (3p)

2. Betrakta funktionen $f(x, y) = (3x + 4y)e^{-(x^2+y^2)/2}$

- (a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y)$ och avgör om f har lokalt max, min eller sadelpunkt i dessa punkter. (4p)

- (b) Visa att $|f(x, y)| \leq \frac{5}{\sqrt{e}}$ för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (2p)

3. (a) Bestäm ett linjärt variabelbyte $u = ax + by, v = cx + dy$ som är sådant att $uv = y^2 - x^2$ och bestäm (för dina val av $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) det område E i uv -planet som motsvaras av triangelområdet D i xy -planet med hörn i $(0, 0), (1, 1)$ och $(0, 2)$. (2p)

- (b) Använd variabelbytet i deluppgift (a) för att avgöra för vilka α som följande integral är konvergent, och bestäm dess värde för sådana α ;

$$\iint_D (y^2 - x^2)^\alpha dx dy \quad (4p)$$

4. (a) Definiera vad som menas med att ett vektorfält är *konserverativt* respektive *virvelfritt* och redogör för sambanden mellan dessa begrepp. (3p)

- (b) Beräkna kurvintegralen $\int_C (x+1)ze^{x-y}dx - xze^{x-y}dy + xe^{x-y}dz$,
då C är kurvan med parametrisering $\mathbf{r}(t) = (t, t - \sin(\pi t), t)$, $0 \leq t \leq 1$. (3p)

5. Hastighetsvektorn i en gasströmning är $\mathbf{v} = (ye^{-z}, xe^z, x+z)$ och dess masstäthet är $\rho(x, y, z) = z$. Då är vektorfältet $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$ flödet av massa per tidsenhet och areaenhet.

- (a) Beräkna massflödet (massa per tidsenhet) som strömmar ut ur det område som begränsas av konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och planet $z = 1$. (4p)

- (b) Hur stort är flödet genom bara den konformade delen av begränsningsytan? (2p)

VÄND!

6. (a) Definiera begreppet *kontinuitet* för en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ och avgör om följande reellvärda funktion av två variabler är kontinuerlig i origo;

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \quad \text{då } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad \text{då } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3p)$$

- (b) Definiera begreppet *differentierbarhet* och ge exempel på en funktion $f(x, y)$ som är kontinuerlig och partiellt deriverbar i en punkt (a, b) , men inte differentierbar i (a, b) . (3p)

7. Låt $\mathcal{S}$ vara den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ som ligger mellan planen $z = 2$ och $z = \sqrt{6}$.

- (a) Beskriv $\mathcal{S}$ i rympolära/sfäriska koordinater. (2p)

- (b) Antag att ytan $\mathcal{S}$ har en massbeläggning med densiteten $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ (kg/m^2). Vad är då ytans totala massa? (3p)

8. Bevisa Greens formel för områden som är både x -enkla och y -enkla. (5p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för MVE655, läsåret 24/25

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.