Lösningsförslag till tenta 15 jan 2025

Uppg 1 a) $f(x,y,z) = xyz$, $\operatorname{grad} f = (yz, xz, xy)$

$\operatorname{grad} f(1,2,3) = (6,3,2)$ så normallinjen ges av;

$(x,y,z) = (1,2,3) + t(6,3,2)$, $t \in \mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{2}$$

b) $h(x) = \int f(x)\,dx$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = y + f(x) \Rightarrow u = xy + h(x) + g(y)$$

$$u(x,1) = x + h(x) + g(1) = x \Rightarrow h(x) = -g(1) = C$$

$$u(1,y) = y + C + g(y) = y^2 \Rightarrow g(y) = y^2 - y - C$$

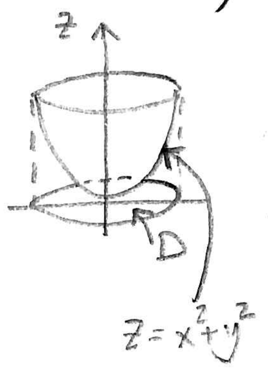
så $u(x,y) = xy + y^2 - y$

c) $F'_r = f'_x \cdot \cos\varphi + f'_y \sin\varphi$, $F'_\varphi = f'_x(-r\sin\varphi) + f'_y r\cos\varphi$

$$\Rightarrow (F'_r)^2 + \left(\frac{F'_\varphi}{r}\right)^2 = (f'_x\cos\varphi + f'_y\sin\varphi)^2 + (-f'_x\sin\varphi + f'_y\cos\varphi)^2 =$$

$$= (f'_x)^2\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + (f'_y)^2\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{=1} = |\nabla f|^2$$

d) $$\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{x^2+y^2}^{1} e^{z^2}\,dz\right)dx\,dy = \int_0^1\left(\iint_{x^2+y^2\le z} e^{z^2}\,dx\,dy\right)dz =$$



$$= \int_0^1 e^{z^2}\left(\iint_{x^2+y^2\le z} dx\,dy\right) = \pi\int_0^1 z e^{z^2}\,dz = \pi\left[\tfrac{1}{2}e^{z^2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2}(e-1)$$

Uppg 2 a) $f(x,y) = (3x+4y)e^{-(x^2+y^2)/2}$

$$\begin{cases} f'_x = (3 - x(3x+4y))e^{-(x^2+y^2)/2} = 0 \\ f'_y = (4 - y(3x+4y))e^{-(x^2+y^2)/2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x(3x+4y) = 0 \\ 4 - y(3x+4y) = 0 \end{cases}$$

$$\underset{y\cdot\text{"ekv. 1"} - x\cdot\text{"ekv. 2"}}{\Rightarrow} \quad 3y - 4x = 0 \quad \underset{\text{ekv. 1}}{\Rightarrow} \quad 3 - x\left(3x + 4\cdot\frac{4x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{4x}{3} = \pm\frac{4}{5}$$

så vi har de två stationära punkterna $\underline{\underline{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)}}$ och $\underline{\underline{\left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)}}$. Vidare är;

$$f''_{xx} = (-6x - 4y - x(3 - x(3x+4y)))e^{-(x^2+y^2)/2}$$

$$f''_{yy} = (-3x - 8y - y(4 - y(3x+4y)))e^{-(x^2+y^2)/2}$$

$$f''_{xy} = (-4x - y(3 - x(3x+4y)))e^{-(x^2+y^2)/2}$$

Hessematriserna i de två stat. punkterna är;

$$\mathcal{H}\left(\pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}\right) = \mp\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 34 & 12 \\ 12 & 41 \end{bmatrix} e^{-1/2}$$

Denna matris är positivt definit i $\left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ ty där är $\det\mathcal{H} = \frac{1}{25e}(34\cdot 41 - 12^2) > 0$ och $f''_{xx} = \frac{34}{5\sqrt{e}} > 0$ så f har ett lokalt minimum i $\left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$

I $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ är matrisen negativt definit ty $\det\mathcal{H}$ är samma som i $\left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ men $f''_{xx} = \frac{-34}{5\sqrt{e}} < 0$ så f har ett lokalt maximum i $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

b) Vi har $f(\pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}) = \pm\frac{5}{\sqrt{e}}$ och

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{polära koord.}}}{f(x,y) =} \underbrace{(3\cos\varphi + 4\sin\varphi)}_{\text{begr.}} \underbrace{re^{-r^2/2}}_{\to 0} \to 0 \text{ då } r \to \infty$$

vilket visar att $|f(x,y)| \leq \frac{5}{\sqrt{e}}$ för alla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Uppg 3 a) $uv = (ax+by)(cx+dy) = acx^2 + (ad+bc)xy + bdy^2$

vilket blir $y^2 - x^2$ om $ac = -1$ (1), $ad+bc = 0$ (2), $bd = 1$ (3)

(1) $\Rightarrow c = -1/a$ och (3) $\Rightarrow d = 1/b$ som insatt i (2) ger

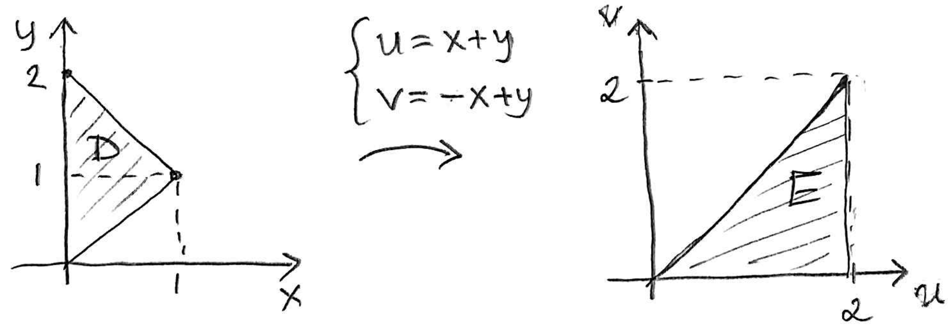
$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b$$

så alla variabelbyten som uppfyller villkoret $uv = y^2 - x^2$ har formen;

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & \pm t \\ -1/t & \pm 1/t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

t.ex. ger $a = b = 1$ variabelbytet $\begin{cases} u = x+y \\ v = -x+y \end{cases}$

och för detta variabelbyte avbildas D på triangelområdet E i uv-planet med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(2,2)$.



Anm. Det räcker gott att hitta värden på a, b, c, d som funkar. En allmän utredning är ej nödvändig.

b) $$\iint_D \underbrace{(y^2-x^2)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{på } D}}{}^{\alpha}\,dxdy \underset{\substack{\uparrow \\ \begin{cases} u=x+y \\ v=-x+y \end{cases}}}{=} \iint_E (uv)^{\alpha}\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\,dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^u u^{\alpha}v^{\alpha}\,dv\,du \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha>-1}}{=} \frac{1}{2}\int_0^2 u^{\alpha}\left[\frac{v^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^u du =$$

$$= \frac{1}{2(\alpha+1)}\int_0^2 u^{2\alpha+1}\,du \underset{\substack{\uparrow \\ 2\alpha+1>-1 \\ \Leftrightarrow \alpha>-1}}{=} \frac{1}{2(\alpha+1)}\left[\frac{u^{2\alpha+2}}{2\alpha+2}\right]_0^2 = \underline{\underline{\left(\frac{2^{\alpha}}{\alpha+1}\right)^2}}$$

Av kalkylerna framgår också att integralen är divergent för $\alpha \leq -1$, och alltså bara konvergent för $\underline{\underline{\alpha>-1}}$.

<u>Uppg 4</u> b) $\mathbb{F} = ((x+1)ze^{x-y}, -xze^{x-y}, xe^{x-y})$ är konservativt på hela $\mathbb{R}^3$ ty;

$$\operatorname{rot}\mathbb{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x+1)ze^{x-y} & -xze^{x-y} & xe^{x-y} \end{vmatrix} = \mathbb{O}$$

så kurvintegralens värde är ober. av väg. Om vi istället integrerar längs raka linjestycket C_0 mellan origo och $(1,1,1)$ så får vi;

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_{C_0}\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{r}(t)=(t,t,t)}}{=} \int_0^1((t+1)t-t^2+t)\,dt = \int_0^1 2t\,dt = \underline{\underline{1}}$$

alt. Vi kan också beräkna integralen genom att bestämma en potential U och använda att

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = U(1,1,1) - U(0,0,0)$$

I detta fall får vi ; $U = xze^{x-y}$

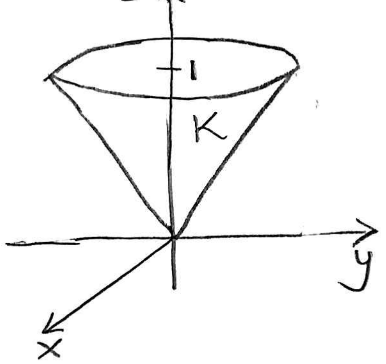
alt. eller så kan vi beräkna integralen direkt med den parametrisering av C som är given i uppg, och får då ;

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \left((t+1)te^{\sin(\pi t)} - t^2(1-\pi\cos(\pi t))e^{\sin(\pi t)} + te^{\sin(\pi t)}\right)dt =$$

$$= \int_0^1 2te^{\sin(\pi t)}\,dt + \int_0^1 t^2\pi\cos(\pi t)e^{\sin(\pi t)}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{part. int.} \\ \text{på den första} \\ \text{integralen}}}{=}$$

$$= \left[t^2 e^{\sin(\pi t)}\right]_0^1 = \underline{\underline{1}}$$

Uppg 5 a)



$$\text{Flödet} = \iint_{\partial K} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\,dS \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauss sats}}}{=} \iiint_K \underbrace{\operatorname{div}\mathbb{F}}_{x+2z}\,dV \underset{\substack{\uparrow \\ \text{symmetri}}}{=}$$

$$= \iiint_K 2z\,dV = \int_0^1 2z\left(\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} dx\,dy\right)dz =$$

$$= \int_0^1 2z \cdot \pi z^2\,dz = 2\pi\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

b) Om S är den konformade delen av ∂K och S_0 cirkelskivan på toppen av ∂K så får vi;

$$\iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = \underbrace{\iint_{\partial K} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS}_{=\frac{\pi}{2} \text{ enl. a)}} - \iint_{S_0} \mathbb{F}\cdot\underbrace{\hat{\mathbb{N}}}_{=(0,0,1) \text{ på } S_0}\,\underbrace{dS}_{=dxdy \text{ på } S_0} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \iint_{x^2+y^2\le 1} (x+\underset{\substack{\uparrow \\ z=1 \\ \text{på } S_0}}{1})\,dxdy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Symmetri}}}{=} \frac{\pi}{2} - \iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy = \frac{\pi}{2} - \pi = \underline{\underline{\frac{-\pi}{2}}}$$

---

⑥ a) f är inte kontinuerlig ty t.ex har vi;

$$f(x,x) \underset{\substack{\uparrow \\ x\neq 0}}{=} \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0), \text{ då } x\to 0$$

b) T.ex. är $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{då } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{då } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

kont. och partiellt deriverbar men inte differentierbar i origo;

Kontinuerlig ty $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{\text{polära koord.}}{=} r\cos\varphi\sin\varphi \to 0$ då $r\to 0$

Part. deriverbar ty $\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0 \to 0$

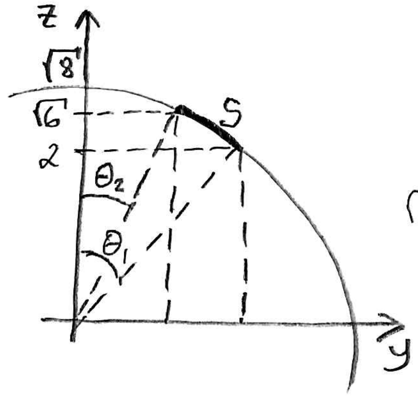
men ej differentierbar ty;

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)h-f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{h^2+k^2} \overset{\text{enl. a)}}{\not\to} 0$$

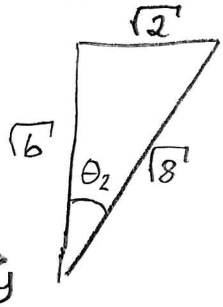
<u>Anm.</u> $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ är ett annat exempel

Uppg 7

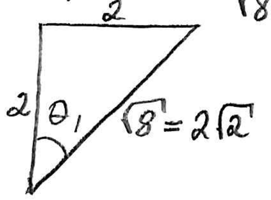
a) Med $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ är $S: \underline{\underline{r=\sqrt{8},\ \frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{4},\ 0\le\varphi\le 2\pi}}$



$$\theta_2 = \arccos\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$



$$\theta_1 = \arccos\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\pi}{4}$$



b)

$$\iint_S \rho\, dS \underset{\text{sfäriska koord.}}{=} \int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \underbrace{8\sin^2\theta}_{x^2+y^2 \text{ på } S}\cdot\underbrace{8\sin\theta\, d\varphi\, d\theta}_{dS \text{ på } S} =$$

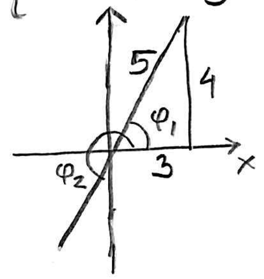
$$= 64\cdot 2\pi\cdot\int_{\pi/6}^{\pi/4}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= 128\pi\left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{16\pi}{3}\left(9\sqrt{3}-10\sqrt{2}\right)$$

Alternativ lösn. till uppg 2

a) $f(x,y) = (3x+4y)e^{-(x^2+y^2)/2} \overset{\text{polära koord.}}{=} \underbrace{(3\cos\varphi + 4\sin\varphi)re^{-r^2/2}}_{g(r,\varphi)}$

$$\begin{cases} g'_r = (3\cos\varphi + 4\sin\varphi)(1-r^2)e^{-r^2/2} = 0 \\ g'_\varphi = (-3\sin\varphi + 4\cos\varphi)e^{-r^2/2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \tan\varphi = \frac{4}{3} \end{cases}$$



$\tan\varphi = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{matrix} \cos\varphi = \pm 3/5 \\ \sin\varphi = \pm 4/5 \end{matrix}$

Vilket motsvarar $(x,y) = \pm\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

Vidare är i dessa punkter;

$g''_{rr} = (3\cos\varphi + 4\sin\varphi)(-2r - r(1-r^2))e^{-r^2/2} = \mp 10e^{-1/2}$

$g''_{r\varphi} = (-3\sin\varphi + 4\cos\varphi)(1-r^2)e^{-r^2/2} = 0$

$g''_{\varphi\varphi} = -(3\cos\varphi + 4\sin\varphi)e^{-r^2/2} = \mp 5e^{-1/2}$

och motsvarande kvadratiska former är

$$Q(h,k) = \mp 5(2h^2 + k^2)$$

som är negativt resp. positivt definit så f har lok.max i $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ och lok.min i $\left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$.

b) $|f(x,y)| = |g(r,\varphi)| = |5\sin(\varphi + \overset{\text{arctan}(3/4)}{\varphi_0})|\underbrace{re^{-r^2/2}}_{h(r)} \leq 5e^{-1/2}$

ty $h'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 1$ (se ovan) och

r	0		1		∞
h'(r)		+	0	−	
h(r)	0	↗	$e^{-1/2}$	↘	0