Lösningsförslag till tenta 15 april 2025

Uppg 1 a) $D(f\circ g)(t) = f'(g(t))\, g'(t) \underset{\substack{\uparrow \\ x=g(t)}}{=} \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(D(f\circ g)(2,1)) \underset{\substack{\nearrow \\ g(2,1)=(0,7)}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 14 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot 7^3 = \underline{\underline{-686}}$$

b) En funktion växer snabbast i gradientens riktning så $\operatorname{grad} f = k(1,2,2)$ för ngt $k>0$, och derivatan i den riktningen är $|\operatorname{grad} f| = k|(1,2,2)| = 3k = 6$ så $k=2$. I riktningen mot $v=(2,2,1)$ får vi då;

$$f'_{\hat{v}} = \operatorname{grad} f \bullet \hat{v} = 2(1,2,2)\bullet\frac{(2,2,1)}{3} = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$$

c) $(x,y)=(0,1)$ insatt i ekv. $\underbrace{xz^2+yz}_{F(x,y,z)}=2$ ger $z=2$

och $F'_z(0,1,2) = 2xz+y\Big|_{(0,1,2)} = 1 \neq 0$ så ekv. beskriver implicit z som funktion av x och y lokalt kring $(0,1,2)$. Vidare ger implicit derivering m.a.p. x resp. y att;

$$z^2 + 2xz\,z'_x + y z'_x = 0 \Rightarrow z'_x(0,1) = \frac{-z^2}{2xz+y}\Bigg|_{(0,1,2)} = -4$$

$$2xz\,z'_y + z + y z'_y = 0 \Rightarrow z'_y(0,1) = \frac{-z}{2xz+y}\Bigg|_{(0,1,2)} = -2$$

så linjäriseringen av $z(x,y)$ i punkten $(0,1)$ är; $L[z,(0,1)](x,y) = \underline{\underline{2-4x-2(y-1)}}$ $(=4-4x-2y)$

d) $\iiint\limits_K z^3 \, dV \underset{\uparrow}{=} \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos^3\theta \, r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr =$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^2 \left[\frac{-\cos^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}}$$

<u>Uppg 2</u> a) Vi behöver bestämma största och minsta värde för $f(x,y) = xe^y - yx^2$ på $D: 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$.

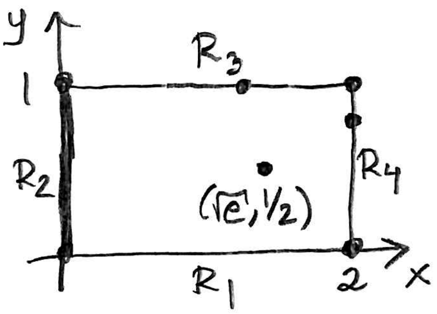
$$\begin{cases} f'_x = e^y - 2xy = 0 & (1) \\ f'_y = xe^y - x^2 = 0 & (2) \end{cases}$$ (<u>Undersöker kritiska punkter</u>)

$(1) \Rightarrow e^y = 2xy \overset{(2)}{\Rightarrow} x^2(2y-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $y = \frac{1}{2}$

$x = 0$ insatt i (1) ger inga lösningar

$y = 1/2$ insatt i (1) ger $x = \sqrt{e}$

Vi har $(\sqrt{e}, 1/2) \in D$ och $f(\sqrt{e}, 1/2) = e - \frac{e}{2} = \boxed{\frac{e}{2}}$



<u>Längs R_1</u> är $f(x,0) = x$ som saknar stat. punkt för $0 < x < 2$.

<u>Längs R_2</u> är $f(0,y) = \boxed{0}$

<u>Längs R_3</u> är $f(x,1) = \underbrace{ex - x^2}_{g(x)}$, $g'(x) = e - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$

Vi har $0 < \frac{e}{2} < 2$ och $f(\frac{e}{2}, 1) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} = \boxed{\frac{e^2}{4}}$

<u>Längs R_4</u> är $f(2,y) = \underbrace{2e^y - 4y}_{h(y)}$, $h'(y) = 2e^y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \ln 2$

Vi har $0 < \ln 2 < 1$ och $f(2, \ln 2) = \boxed{4 - 4\ln 2}$

Till sist undersöker vi <u>hörnen</u>;

$f(0,0) = f(0,1) = \boxed{0}$, $f(2,0) = \boxed{2}$, $f(2,1) = \boxed{2e-4}$

Vi har; $\frac{e}{2}<2$, $\frac{e^2}{4}<\frac{\sqrt{8}^2}{4}=2$, $2e-4<2\sqrt{8}-4<2\cdot\sqrt{9}-4=2$

och $4-4\ln 2 = 4-4\ln(\sqrt{8})^{2/3} < 4-4\cdot\frac{2}{3}\ln e = \frac{4}{3}<2$, så

$$\underline{\underline{V_f=[0,2]}}$$

b) Från deluppg. a) vet vi att $(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$ är en kritisk punkt. Vidare har vi;

$$f(x,\tfrac{1}{2})=\underbrace{\sqrt{e}\,x-\frac{1}{2}x^2}_{g(x)},\quad g'(x)=\sqrt{e}-x\begin{cases}>0 & \text{då } x<\sqrt{e}\\ <0 & \text{då } x>\sqrt{e}\end{cases}$$

så $g(x)$ har ett lok. max i $x=\sqrt{e}$

$$f(\sqrt{e},y)=\underbrace{\sqrt{e}\,e^y-ey}_{h(y)},\quad h'(y)=\sqrt{e}\,e^y-e\begin{cases}<0, & \text{då } y<\frac{1}{2}\\ >0, & \text{då } y>\frac{1}{2}\end{cases}$$

så $h(y)$ har ett lok. min i $y=\frac{1}{2}$.

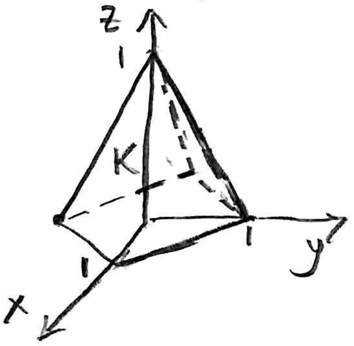
Detta visar att $f(x,y)$ har en sadelpunkt i $(\sqrt{e},\frac{1}{2})$.

<u>Alt.</u> Vi har; $f''_{xx}=-2y$, $f''_{xy}=e^y-2x$, $f''_{yy}=xe^y$

så $\det(\mathcal{H}(\sqrt{e},\tfrac{1}{2}))=\begin{vmatrix}-1 & -\sqrt{e}\\ -\sqrt{e} & e\end{vmatrix}=-2e<0$

vilket också visar att $(\sqrt{e},\frac{1}{2})$ är en sadelpunkt.

<u>Uppg 3</u> b) Av symmetriskäl är $x_T=y_T=0$. Vidare är;



$$\iiint_K z\,dV=\int_0^1 z\left(\iint_{D_z}dxdy\right)dz=\int_0^1 z\cdot\underbrace{2(1-z)^2}_{\text{Arean av } D_z}dz=$$

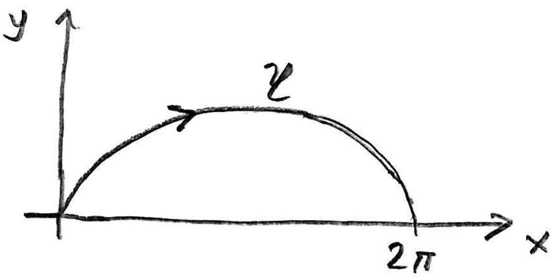
$$=2\int_0^1(z-2z^2+z^3)\,dz=2\left[\frac{z^2}{2}-\frac{2}{3}z^3+\frac{z^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

och $\iiint_K dV=\frac{B\cdot h}{3}=\frac{2}{3}$ så $z_T=\frac{1/6}{2/3}=1/4$

Pyramidens tyngdpunkt är $\underline{\underline{(0,0,1/4)}}$

Anm. Kakylen kan lätt generaliseras till vilken kon som helst (med annan bas) och få $z_T = \frac{h}{4}$.

Uppg 4 a) Notera att $\mathbf{r}(0)=(0,0)$, $\mathbf{r}(2\pi)=(2\pi,0)$, samt att $x'(t)=y(t)=1-\cos t \geq 0$ så

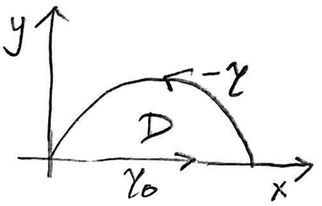


Vidare är längden av $\gamma = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\,dt =$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\;dt = \underline{\underline{\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\;dt}}$$

b) Med $P\equiv 0$ och $Q\equiv x$ ger Greens formel att;

Arean av $D = \iint_D dA = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=1} dA =$



med positiv orientering

$$= \int_{\partial D} x\,dy = \underbrace{\int_{\gamma_0} x\,dy}_{=0 \text{ på } \gamma_0} + \int_{-\gamma} x\,dy = \int_{2\pi}^{0}(t-\sin t)\sin t\,dt =$$

$$= \int_{2\pi}^{0} t\sin t - \int_{2\pi}^{0}\sin^2 t\,dt \overset{\text{P.I.}}{=} \underbrace{\Big[-t\cos t\Big]_{2\pi}^{0}}_{2\pi} + \underbrace{\int_{2\pi}^{0}\cos t\,dt}_{=0} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}\underbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}_{1}\,dt = 2\pi + \pi = \underline{\underline{3\pi}}$$

Uppg 5 a) Med $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ och $z = 2\sin 2t$

är $\underline{\underline{xy}} = 2\cos t \cdot 2\sin t = 2 \cdot \underbrace{2\cos t \sin t}_{\sin 2t} = \underline{\underline{z}}$

så C ligger i ytan $z = xy$.

b) C är kantkurva till ytan S: $z = xy$, $x^2 + y^2 \le 4$

så Stokes sats ger;

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \underbrace{\operatorname{rot} \mathbf{F}}_{(0,0,3x^2+3y^2)} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{N}}\, dS}_{(-y,-x,1)dxdy} = \iint_{x^2+y^2 \le 4} 3(x^2+y^2)\, dA =$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r \, d\varphi \, dr = 6\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = \underline{\underline{24\pi}}$$

Uppg 6 Med variabelbytet $u = y$, $v = xy$ får vi;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=y} = y \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y \frac{\partial f}{\partial v}\right) = y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=y}\right) = y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial f}{\partial v} + y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{x}\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial v} + y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

så $x \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial x} = -y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 1 \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{-1}{u^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{u} + g(v) \Rightarrow f = \frac{v}{u} + G(v) + h(u) \Rightarrow$$

$\underline{\underline{f = x + G(xy) + h(y)}}$, för ngn deriverbar funktion h

och två gånger deriverbar funktion G.

Uppg 7 a) $\dfrac{dx}{x/(x^2+4y^2)} = \dfrac{dy}{4y/(x^2+4y^2)} \Leftrightarrow \dfrac{4\,dx}{x} = \dfrac{dy}{y} \Leftrightarrow$

$4\ln|x| = \ln|y| + C \Leftrightarrow y = Dx^4$

$(x,y)=(1,1) \Rightarrow D=1$

så fältlinjen genom $(1,1)$ är $\underline{\underline{y=x^4}}$

b) $\begin{cases} U'_x = x/(x^2+4y^2) & ① \\ U'_y = 4y/(x^2+4y^2) & ② \end{cases}$

$① \Rightarrow U = \frac{1}{2}\ln|x^2+4y^2| + g(y) \Rightarrow$

$U'_y = \dfrac{4y}{x^2+4y^2} + g'(y) \underset{②}{\Rightarrow} g'(y)=0 \Rightarrow g(y)=C$

$(x,y)=(1,1)$ insatt i $\frac{1}{2}\ln|x^2+4y^2| = D$ ger $D = \frac{1}{2}\ln 5$

så ekvipotentialkurvan genom $(1,1)$ är

$\frac{1}{2}\ln|x^2+4y^2| = \frac{1}{2}\ln 5 \Leftrightarrow \underline{\underline{x^2+4y^2=5}}$

c)