

Tentamen

MVE655, Flervariabelanalys, Globala system & IT

2025-04-15 , kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Thomas Wernstål , telefon: 3557

Hjälpmedel: Inga

För betyget 3 (godkänt) krävs minst 20 poäng (inklusive ev. bonuspoäng från dugga 2,4 & 6 läsåret 24/25).

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng (inklusive ev. bonuspoäng från alla sex duggorna).

1. (a) Låt $\mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1 x_2)$ och $\mathbf{g}(t_1, t_2) = (t_1 - 2t_2, 3t_1 + t_2)$. Bestäm funktionaldeterminanten för sammansättningen $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ i den punkt där $(t_1, t_2) = (2, 1)$. (2p)
- (b) En differentierbar funktion $f(x, y, z)$ växer i origo snabbast i riktningen $(1, 2, 2)$ och i den riktningen är riktningsderivatan 6. Beräkna funktionens riktningsderivata i origo och i riktning mot $(2, 2, 1)$. (2p)
- (c) Visa att ekvationen $xz^2 + yz = 2$ implicit beskriver en funktion $z = z(x, y)$ i en omgivning av den punkt där $(x, y) = (0, 1)$ och bestäm linjäriseringen av denna funktion i punkten $(0, 1)$. (3p)
- (d) Använd sfäriska koordinater för att beräkna trippelintegralen $\iiint_K z^3 dV$, där $K : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. (3p)
2. Betrakta funktionen $f(x, y) = xe^y - yx^2$ på området $D : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.
 - (a) Bestäm värdemängden $V_f = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$. (4p)
(Anm. Vid jämförelse av tal kan du använda att $e < \sqrt{8}$)
 - (b) Visa att $f(x, y)$ har en sadelpunkt i $(\sqrt{e}, 1/2)$. (2p)
3. (a) Redogör för Medelvärdessatsen för en funktion $f(x, y)$ på ett område $D \subset \mathbb{R}^2$. (2p)
- (b) Bestäm tyngdpunkten för den homogena pyramid K med hörn i de fem punkterna $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-1, 0, 0), (0, -1, 0)$ och $(0, 0, 1)$. (4p)
4. Betrakta den kurva γ i xy -planet som beskrivs av $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
 - (a) Skissa kurvan γ och ställ upp en integral som ger längden av kurvan γ . (3p)
obs! integralen behöver inte beräknas.
 - (b) Beräkna arean av det område D som begränsas av γ och x -axeln. (3p)
Tips: Använd Greens formel på lämplig kurvintegral $\int_{\partial D} P dx + Q dy$, där $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$.
5. Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan som ges av parametriseringen $\mathbf{r} = (2 \cos t, 2 \sin t, 2 \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ och låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x - y^3, e^y + x^3, e^z)$.
 - (a) Visa att kurvan $\mathcal{C}$ ligger i ytan $z = xy$ (2p)
 - (b) Beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (3p)

VÄND!

6. Bestäm den allmänna lösningen till den partiella differentialekvationen;

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

genom att göra variabelbytet $u = y$, $v = xy$. (5p)

7. Betrakta det konservativa vektorfältet $\mathbf{F} = (\frac{x}{x^2 + 4y^2}, \frac{4y}{x^2 + 4y^2})$

(a) Bestäm fältlinjen till $\mathbf{F}$ genom punkten $(1, 1)$. (2p)

(b) Bestäm fältets ekvipotentialkurva genom punkten $(1, 1)$. (2p)

(c) Skissa fältlinjen och ekvipotentialkurvan i samma figur, tillsammans med vektorfältspil (som illustrerar fältets riktning och styrka) i punkten $(1, 1)$ och i några andra punkter på vardera kurva. (2p)

8. (a) Visa att alla konservativa fält också är virvelfria. (2p)

(b) Formulera Gauss divergenssats och bevisa den för vektorfält av typen $\mathbf{F} = (0, 0, R)$ och i fallet då K är ett rätblock; $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f$ (4p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för MVE655, läsåret 23/24

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.