

Tentamen

MVE655, Flervariabelanalys, Globala system & IT

2025-08-18 , 14.00 - 18.00

Examinator: Thomas Wernstål , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Thomas Wernstål , telefon: 3557

Hjälpmedel: Inga

För betyget 3 (godkänt) krävs minst 20 poäng (inklusive ev. bonuspoäng från dugga 2,4 & 6 läsåret 24/25).

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng (inklusive ev. bonuspoäng från alla sex duggorna).

1. (a) Bestäm och skissa definitionsmängden D_f till funktionen $f(x, y) = \sqrt{\frac{xy}{x-y}}$.
Bestäm och skissa (i samma figur) även funktionens nivåkurva genom punkten $(2, 1)$. (3p)
(b) Visa att $f(x, y) = x^4 - y^4$ har en sadelpunkt i origo. (2p)
(c) Visa att avbildningen $(x, y) \rightarrow (u, v)$, där $u = x^2 - y^2, v = 2xy$, är lokalt bijektiv i en omgivning av punkten $(2, 1)$ och bestäm $\frac{\partial x}{\partial u}(3, 4)$. (3p)
(d) Beräkna $\iiint_D (2zx^2 + y^2) dV$, där $D : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 1$. (3p)
2. (a) Bevisa formeln $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$ för riktningsderivatan av en funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ i riktningen $\mathbf{v}$, där $|\mathbf{v}| = 1$. (3p)
(b) Antag att $f(x, y)$ är en differentierbar funktion sådan att $f'_{\mathbf{v}}(0, 0) = 5$ och $f'_{\mathbf{u}}(0, 0) = 5$, där $\mathbf{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ och $\mathbf{u} = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Vad är då värdet på den partiella derivatan $f'_x(0, 0)$? (2p)
3. Betrakta funktionen $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$
(a) Visa att $f(x, y)$ är begränsad på $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$. (2p)
(b) Bestäm medelvärdet av $f(x, y)$ på triangelområdet med hörn i $(0, 0), (0, 1)$ och $(1, 1)$. (3p)
4. Betrakta kurvorna $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ i planet med parametriseringarna $\mathbf{r}_1 = (t, t - t^2), t \in \mathbb{R}$ respektive $\mathbf{r}_2 = (t + 1, t^2 - 1), t \in \mathbb{R}$.
(a) Kurvorna skär varandra i origo och i en annan punkt P. Vilken är denna andra skärningspunkt? (2p)
(b) Längs vilken av de två kurvorna uträttar vektorfältet $\mathbf{F} = (x^2 e^{-y}, xy^2)$ störst arbete på partikel som rör sig från origo till P? (3p)
5. Betrakta ett flöde som beskrivs av fältet $\mathbf{F} = (2x^3 + yz, y - 2xz, 4z + xy)$ och låt B vara enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
(a) Visa att flödet sker ut ur B i varje punkt på sfären ∂B . (1p)
(b) Bestäm de punkter på ∂B där flödet ut ur B är som minst. (3p)
(c) Bestäm det totala flödet ut ur B . (4p)

VÄND!

6. (a) Formulera kedjeregeln (på matrisform) för sammansättningar $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. (2p)

(b) Bestäm den lösning $u(x, y)$ till differentialekvationen $xu'_x + yu'_y = 1$ som är sådan att $u(x, y) = 1$ för alla (x, y) på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. (3p)

Tips: Uttryck ekvationen i polära koordinater.

7. Låt $\mathcal{S}$ vara den del av ytan $z = 2 - x^2 - y^2$ där $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Beräkna arean av $\mathcal{S}$ (3p)

(b) Beräkna $\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$, där normalen $\hat{\mathbf{N}}$ pekar uppåt i positiv z -riktning, och $\mathbf{F} = (e^x - y, xz^2 + \sin y, \cos(z^3))$. (3p)

8. (a) Ange och motivera formeln för längden av parametriserad kurva. (3p)

(b) Redogör för sambandet mellan ett vektorfält och tangentvektorerna till dess fältlinjer, samt rita en figur som illustrerar detta samband. (2p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för MVE655, läsåret 23/24

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.