Lösningsförslag till tenta 14 jan 2026

uppg 1 a) $g(x,y) = xye^{2x} - 2e^{y}$, $g(1,2) = 0$

$\nabla g = ((2x+1)ye^{2x}, xe^{2x} - 2e^{y})$, $\nabla g(1,2) = (6e^2, -e^2)$

Tangentlinjen: $6e^2(x-1) - e^2(y-2) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 6x-4}}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$

$$f(x, x^3-x) = \frac{x^2+(x^3-x)^2}{x^3} = \frac{1+(x^2-1)^2}{x} \to \pm\infty \text{ då } x \to 0^{\pm}$$

så $f(x,y)$ saknar gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$

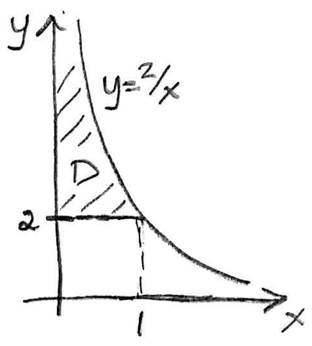
c)
$$\left| \frac{f(1+h,1+k) - f(1,1) - f'_x(1,1)h - f'_y(1,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{(1+h)(1+k) - 1 - h - k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2} \to 0$$

då $(h,k) \to (0,0)$

d)
$$\iint_D \frac{1}{(\ln y)^2}\,dx\,dy = \int_2^{\infty} \left(\int_0^{2/y} \frac{1}{(\ln y)^2}\,dx \right) dy =$$

$$= \int_2^{\infty} \frac{2}{y(\ln y)^2}\,dy = \left[\frac{-2}{\ln y} \right]_2^{\infty} = \underline{\underline{\frac{2}{\ln 2}}}$$



---

uppg 2 a) $f(x,y) = 6xy - 2x^2y - xy^2$

$$\begin{cases} f'_x = 6y - 4xy - y^2 = y(6-4x-y) = 0 \\ f'_y = 6x - 2x^2 - 2xy = x(6-2x-2y) = 0 \end{cases} \text{ då } (x,y) = (1,2)$$

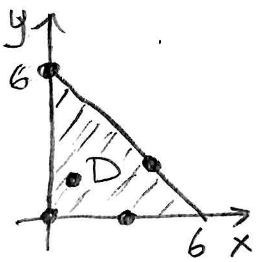
så $(1,2)$ är en stationär punkt.

Vidare är $\mathcal{H}(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y & 6-4x-2y \\ 6-4x-2y & -2x \end{bmatrix}$

Spec. är $\det \mathcal{H}(1,2) = \begin{vmatrix} -8 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} > 0$ och $f''_{xx}(1,2) < 0$

så f har ett lokalt max i $(1,2)$, och därmed spec. $f(x,y) \leq f(1,2) = 4$ för alla (x,y) i omg av $(1,2)$

b) Från lösn. av deluppg (a) ser vi att $f(x,y)$ också har de stationära punkterna $(0,0), (0,6), (3,0)$ i D, och spec. är $f(0,0) = f(0,6) = f(3,0) = 0$



Vi undersöker också möjliga extremvärden på randen av D;

Längs axlarna, där $x=0$ eller $y=0$, är $f(x,y)=0$ och längs kanten $y = 6-x$, $0<x<6$ är;

$$f(x,6-x) = 6x(6-x) - 2x^2(6-x) - x(6-x)^2 = x^3 - 6x^2 = g(x)$$

$$g'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } x=4$$

och spec. är $f(4,2) = g(4) = -32$

Sammantaget följer att funktionens största och minsta värde på D är 4 resp. -32, så enl. satsen om mellanliggande värden (Sats. 3.2) har ekv. $f(x,y)=k$ minst en lösning i D om $\underline{\underline{-32 \leq k \leq 4}}$. (obs! f är kont. på D och D är bågvis sammanh.)

<u>Uppg 3</u> b) Av symmetriskäl är $x_T = y_T = 0$. Vidare är;

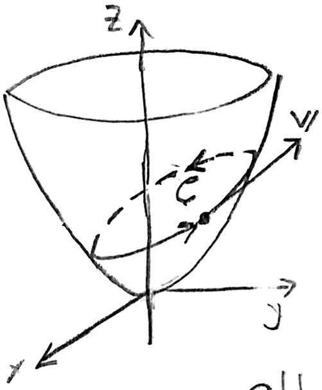
$$\iint_S z\,dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} 2\cos\theta \cdot 4\sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 8\pi\left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = 8\pi$$

och $\displaystyle\iint_S dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} 4\sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 8\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = 8\pi$

så $(x_T, y_T, z_T) = \underline{(0,0,1)}$

Uppg 4 a) $g(x,y)=x^2+y^2-z\,,\; h(x,y)=2y+3-z$

$\nabla g=(2x,2y,-1)\,,\;\nabla h=(0,2,-1)$



$$\nabla g(2,1,5)\times\nabla h(2,1,5)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 4 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=(0,4,8)$$

så partikelns hastighet är $5\,\dfrac{(0,1,2)}{\sqrt5}=\underline{\underline{\sqrt5\,(0,1,2)}}$

alt. $\begin{cases} z=x^2+y^2\\ z=2y+3\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=2y+3 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=4$

så skärningskurvan kan parametriseras med

$\mathbf{r}=(2\cos t,\,1+2\sin t,\,5+4\sin t)\,,\quad 0\xrightarrow{t}2\pi$

Vi har $\mathbf{r}(0)=(2,1,5)$ och $\mathbf{r}'=(-2\sin t,\,2\cos t,\,4\cos t)$

så partikelens hast. är $5\,\dfrac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|}=5\,\dfrac{(0,2,4)}{2\sqrt5}=\sqrt5\,(0,1,2)$ (m/s)

b) $$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+z & z+y & x+y\end{vmatrix}=(1-1,\,1-1,\,0-0)=\mathbf{0}$$

så $\mathbf{F}$ är konservativt på $\mathbb{R}^3$ och det finns en potential U s.a.

$$\begin{cases} U'_x=x+z \Rightarrow U=\frac{x^2}{2}+xz+g(y,z) \Rightarrow\\ U'_y=z+y \quad ② \\ U'_z=x+y \quad ③ \end{cases}\Bigg|\; U'_y=g'_y\underset{②}{=}z+y\Rightarrow g=yz+\frac{y^2}{2}+h(z)$$

Av detta följer att $U=\frac{x^2}{2}+xz+yz+\frac{y^2}{2}+h(z)\Rightarrow$

$U'_z=x+y+h'(z)\overset{③}{\Rightarrow} h'(z)=0\Rightarrow h(z)=C$, så

$U=\frac{x^2}{2}+xz+yz+\frac{y^2}{2}$ är en potential till $\mathbf{F}$.

och sper. är $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\underbrace{U(2,1,5)}_{35/2}-\underbrace{U(0,-1,1)}_{-1/2}=\underline{\underline{18}}$

alt med parametriseringen från deluppg. (a) får vi;

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-\pi/2}^{0} \big((2\cos t+5+4\sin t)(-2\sin t)+(6+6\sin t)2\cos t\big)\,dt$$

$$+\int_{-\pi/2}^{0}(2\cos t+1+2\sin t)4\cos t\,dt = \underbrace{\int_{-\pi/2}^{0}(8\cos^2 t-8\sin^2 t)\,dt}_{=0} +$$

$$+\left[8\sin^2 t+10\cos t+16\sin t\right]_{-\pi/2}^{0} = 10-8+16=\underline{\underline{18}}$$

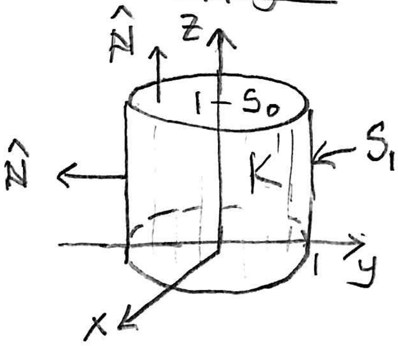
alt kan vi använda att arbetet för ett konservativt fält är vägoberoende och integrera längs det räta linjestycket mellan punkterna;

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \underset{\uparrow}{=} \int_0^1\big((6t+1)2+6t\cdot 2+(4t-1)4\big)\,dt=\int_0^1(40t-2)\,dt$$

$$\mathbf{r}=(2t,2t-1,4t+1),\ 0\xrightarrow{t}1 \qquad =\left[20t^2-2t\right]_0^1 = \underline{\underline{18}}$$

Uppg 5 b)

$$\iint_{S_1}\underbrace{\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}}_{\substack{=e\\ \text{på } S_1}}dS+\iint_{S_0}\underbrace{\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}}_{\substack{=e\\ \text{på } S_0}}dS = 2\pi e+e = \underline{\underline{3\pi e}}$$



alt ger Gauss sats att flödet är;

$$\iiint_K \underbrace{\big(2(1+x^2+y^2)e^{x^2+y^2}+(1+2z^2)e^{z^2}\big)}_{\operatorname{div}\mathbf{F}}\,dV=$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 (2(1+r^2)e^{r^2}r\,dz\,d\varphi\,dr + \int_0^1\Big(\iint_{x^2+y^2\le 1}(1+2z)e^{z^2}dA\Big)dz=$$

$$=2\pi\left[r^2e^{r^2}\right]_0^1+\pi\left[ze^{z^2}\right]_0^1 = 2\pi e+\pi e = \underline{\underline{3\pi e}}$$

Uppg. 6 a) Variabelbytet $u = x+2t,\ v = x-2t$ ger;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = 2\frac{\partial f}{\partial u} - 2\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(2\frac{\partial f}{\partial u} - 2\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial t}\right) +$$

$$-2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right) = 4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

så $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Leftrightarrow 16\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{\partial f}{\partial v} = h(v) \Leftrightarrow f = G(u) + H(v) \Rightarrow$

$f(x,y) = G(x+2t) + H(x-2t)$, för några reellvärda funktioner G och H med kont. andraderivator.

b) $f(x,0) = G(x) + H(x) = x^2 \Rightarrow H(x) = x^2 - G(x) \Rightarrow$

$f(x,t) = G(x+2t) + (x-2t)^2 - G(x-2t) \Rightarrow$

$f'_t(x,t) = 2G'(x+2t) - 4(x-2t) + 2G'(x-2t)$

$f'_t(x,0) = 4G'(x) - 4x = x \Rightarrow G'(x) = \frac{5}{4}x$

$G(x) = \frac{5}{8}x^2 + C \Rightarrow f(x,t) = \frac{5}{8}(x+2t)^2 + \frac{3}{8}(x-2t)^2 =$

$= \underline{\underline{x^2 + xt + 4t^2}}$

Uppg 7 a) $\frac{dx}{-y} \overset{(1)}{=} \frac{dy}{x} \overset{(2)}{=} \frac{dz}{2x}$

$(1) \Leftrightarrow x\,dx = -y\,dy \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{-y^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2C_1$

$(1) \Leftrightarrow 2dy = dz \Leftrightarrow 2y = z + C_2 \Leftrightarrow 2y - z = C_2$

så fältlinjerna är skärningskurvor mellan cylindrar $x^2+y^2=2C_1$ och plan $2y-z=C_2$.

b) $\text{rot}\,\mathbb{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 2x \end{vmatrix} = (0,-2,2)$