

Tentamen
MVE655, Flervariabelanalys, Globala system & IT

2026-01-14 , kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Thomas Wernstål , telefon: 3557

Hjälpmedel: Inga

För betyget 3 (godkänt) krävs minst 20 poäng (inklusive ev. bonuspoäng från dugga 2,4 & 6 läsåret 25/26).

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng (inklusive ev. bonuspoäng från alla sex duggorna).

1. (a) Bestäm tangentlinjen till kurvan $xye^{2x} = 2e^y$ i punkten $(1, 2)$. (2p)
(b) Avgör om gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ existerar. (2p)
(c) Visa att $f(x, y) = xy$ är differentierbar i punkten $(1, 1)$. Använd definitionen! (3p)
(d) Låt D vara området som beskrivs av olikheterna $0 < x < 1, 2 < y < \frac{2}{x}$. Visa att den generaliserade dubbelintegralen $\iint_D \frac{1}{(\ln y)^2} dx dy$ är konvergent och beräkna dess värde. (3p)
2. Låt $f(x, y) = 6xy - 2x^2y - xy^2$ och D vara triangelområdet med hörn i $(0, 0)$, $(6, 0)$ och $(0, 6)$.
(a) Visa att $f(x, y) \leq 4$ för alla (x, y) i någon omgivning av punkten $(1, 2)$. (3p)
(b) För vilka värden på k har ekvationen $f(x, y) = k$ minst en lösning $(x, y) \in D$? (3p)
3. (a) Definiera vad som menas med *areaelementet* för en parametriserad yta, och ange speciellt areaelementet på en sfär $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i sfäriska koordinater. (2p)
(b) Bestäm tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) för halvsfären $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, då den betraktas som ett tunt homogent skal (konstant densitet). Använd att; (3p)
$$x_T = \frac{1}{A} \iint_{\mathcal{S}} x dS, y_T = \frac{1}{A} \iint_{\mathcal{S}} y dS, z_T = \frac{1}{A} \iint_{\mathcal{S}} z dS, \text{ där } A \text{ är arean av } \mathcal{S}.$$
4. Låt $\mathcal{C}$ vara skärningskurvan mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 2y + 3$.
(a) Bestäm hastigheten i punkten $(2, 1, 5)$ hos en partikel som rör sig med den konstanta farten 5 m/s moturs runt $\mathcal{C}$ (sett från en punkt högt upp på positiva z -axeln). (3p)
(b) Bestäm arbetet som fältet $\mathbf{F} = (x + z, z + y, x + y)$ uträttar på en partikel som rör sig längs den del av $\mathcal{C}$ där $x \geq 0$ från $(0, -1, 1)$ till $(2, 1, 5)$. (3p)
5. (a) Definiera begreppet *normaltyntintegral* och motivera att den ger flödet genom en yta. (3p)
(b) Bestäm det totala flödet av fältet $\mathbf{F} = (xe^{x^2+y^2}, ye^{x^2+y^2}, ze^{z^2})$ ut ur det cylindriska området $\Omega : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. (4p)

VÄND!

6. (a) Använd variabelbytet $u = x + 2t$, $v = x - 2t$ för att visa att alla lösningar $f(x, t)$, med kontinuerliga andraderivator, till den endimensionella vågekvationen;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

har formen $f(x, t) = G(x + 2t) + H(x - 2t)$, för några reellvärda funktioner G och H av en variabel, med kontinuerliga andraderivator. (4p)

- (b) Bestäm den lösning till differentialekvationen i (a) som också uppfyller begynnelsevillkoren;

$$\begin{cases} f(x, 0) = x^2 \\ f'_t(x, 0) = x \end{cases} \quad (2p)$$

7. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = (-y, x, 2x)$.

- (a) Bestäm och beskriv (med ekvationer och i ord) fältlinjerna till fältet $\mathbf{F}$. (3p)

- (b) Skissa några fältlinjer från deluppgift (a) och sätt ut några pilar längs fältlinjerna som markerar fältets riktning och styrka. Beräkna även rotationen av fältet $\mathbf{F}$ och sätt ut några pilar i samma figur som markerar rotationsvektorernas riktning. (3p)

obs! skiss av pilar som markerar riktning på fältet och dess rotation kan ge delpoäng, även om du inte lyckas bestämma fältlinjerna.

8. (a) Definiera vad som menas med riktningsderivatan $D_{\hat{\mathbf{v}}}f(\mathbf{a})$ av en funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i en punkt $\mathbf{a}$ i riktningen $\hat{\mathbf{v}}$. (1p)

- (b) Bevisa att $D_{\hat{\mathbf{v}}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{v}}$. (3p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för MVE655, läsåret 25/26

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.