CHALMERS, MATEMATIK, DEL A - MVE705

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAN 2026-01-08

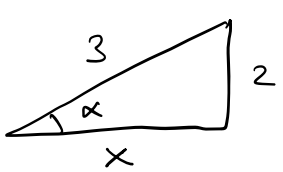
Uppgift 1a: Bestäm $\tan\alpha$ om $\sin\alpha = 2/3$

Lösning: Vi antar att α är en spetsig vinkel, så att $\cos\alpha > 0$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}} = \frac{2/3}{\sqrt{1-4/9}} =$$

$$= \frac{2/3}{\sqrt{9/9-4/9}} = \frac{2/3}{\sqrt{5/9}} = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Vi kan också tänka på α som en av de spetsiga vinklarna i en rätvinklig triangel med motstående katet 2 och hypotenusa 3.



Låt x vara den andra kateten ($x>0$).

Pythagoras sats:

$$x^2+2^2=3^2 \iff x^2+4=9 \iff x=\sqrt{5}$$

Då får vi också $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Svar: $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Uppgift 1b: En ellips ges av ekvationen

$$4x^2+y^2-16x+2y+13=0.$$

Ange centrum (medelpunkt) samt de båda halvaxlarna.

Lösning: Kvadratkomplettering ger

$$4x^2+y^2-16x+2y+13=0 \iff$$
$$4(x^2-4x)+y^2+2y+13=0 \iff$$
$$4\left((x^2-4x+4)-4\right)+(y^2+2y+1)+12=0 \iff$$
$$4(x-2)^2-16+(y+1)^2+12=0 \iff$$
$$4(x-2)^2+(y+1)^2=4 \iff$$
$$\frac{(x-2)^2}{1^2}+\frac{(y+1)^2}{2^2}=1$$

Svar: Centrum $(2,-1)$.

Halvaxlar: 1 i x-led, 2 i y-led.

Uppgift 1c: Beräkna avståndet mellan punkterna $(1/7, 5/7)$ och $(4/7, 9/7)$.

Lösning:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{7}-\frac{4}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}-\frac{9}{7}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2+\left(-\frac{4}{7}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{7^2}+\frac{16}{7^2}} = \sqrt{\frac{9+16}{7^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{9+16}}{7} = \frac{\sqrt{25}}{7} = \frac{5}{7}$$

Svar: $5/7$.

Uppgift 1d: Utveckla $(x^2+2y)^3$.

Lösning:

$$(x^2+2y)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2(2y) + 3(2y)^2x^2 + (2y)^3 =$$

$$= x^6 + 3x^4 \cdot 2y + 3 \cdot 4y^2x^2 + 2^3y^3 =$$

$$= x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3$$

Svar: $x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3$

Uppgift 2: Lös olikheten

$$\frac{x^2+7}{3-x} < 4.$$

Lösning:

$$\frac{x^2+7}{3-x} < 4 \iff \frac{x^2+7}{3-x} - 4 < 0 \iff$$

$$\frac{x^2+7-4(3-x)}{3-x} < 0 \iff$$

$$\frac{x^2+4x-5}{3-x} < 0 \iff$$

$$\frac{(x+5)(x-1)}{3-x} < 0 \iff \frac{(x+5)(x-1)}{x-3} > 0$$

Sätt $f(x) = \dfrac{(x+5)(x-1)}{x-3}$

Teckentabell:

	-5		1		3	
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$\nexists$	$+$

Svar: $-5 < x < 1$ eller $x > 3$.

Uppgift 3: Betrakta följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$$

a) Lös systemet med hjälp av eliminationsmetoden.

b) Skissa de motsvarande linjerna.

Lösning:

a)
$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \quad \text{(byt plats)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases} \quad (2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ 3y = 3 \end{cases} \quad \left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad (-4) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x = -4 \\ y = 1 \end{cases} \quad (-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

b) $2x - 5y = 3 \iff$

$-5y = -2x + 3 \iff$

$y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$

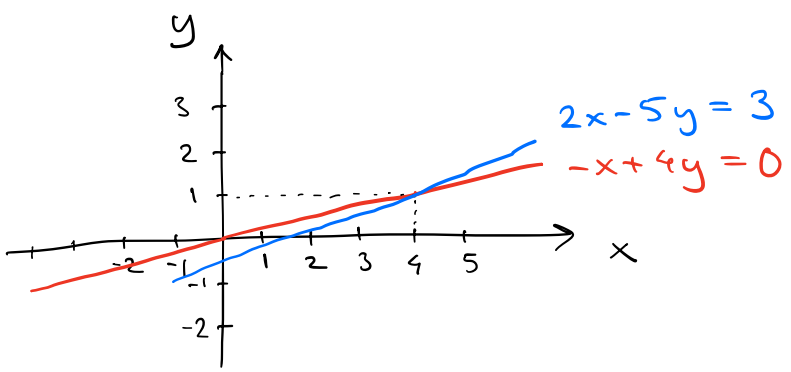
Linje med lutningen $\frac{2}{5}$ som skär y-axeln i $(0, -3/5)$.

$-x + 4y = 0 \iff$

$4y = x \iff y = \frac{1}{4}x$

Linje med lutningen $\frac{1}{4}$ som går genom origo.

Svar: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ (Detta är koordinaterna för skärningspunkten mellan linjerna.)



Uppgift 4: Faktorisera fullständigt polynomet

$p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Lösning: Vi testar $x = 1$!

$p(1) = 1 - 4 + 5 - 2 = 0$ Nollställe!

Enligt faktorsatsen är nu $(x-1)$ en faktor i polynomet $p(x)$. Polynomdivision:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 + 5x - 2 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-(x^3 - x^2) & x^2 - 3x + 2 \\
\cline{1-1}
-3x^2 + 5x & \\
-(-3x^2 + 3x) & \\
\cline{1-1}
2x - 2 & \\
-(2x - 2) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Vidare kan vi faktorisera $x^2 - 3x + 2$ genom att lösa ekvationen $x^2 - 3x + 2 = 0$ eller genom kvadratkomplettering (om det inte visar sig vara irreducibelt):

→

→

$$x^2-3x+2 = x^2-2\tfrac{3}{2}x+\tfrac{9}{4}-\tfrac{9}{4}+2 =$$

$$= \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}+\tfrac{8}{4} =$$

$$= \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4} = \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\left(x-\tfrac{3}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\right)\left(\left(x-\tfrac{3}{2}\right)+\tfrac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(x-\tfrac{4}{2}\right)\left(x-\tfrac{2}{2}\right) = (x-2)(x-1)$$

Svar: $p(x) = (x-1)^2(x-2)$.

Uppgift 5: Förenkla uttrycket

$$\frac{a^{3/2}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{b^{3/2}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \sqrt{ab}\,.$$

Ange också för vilka värden på a och b som det är definierat.

Lösning:

$$\frac{a^{3/2}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{b^{3/2}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \sqrt{ab} =$$

$$= \frac{a^{3/2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+b^{3/2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \sqrt{ab} = \;\rightarrow$$

$$\rightarrow = \frac{a\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) + b\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} + \sqrt{ab} =$$

$$= \frac{a^2 - a\sqrt{ab} + b\sqrt{ab} + b^2}{a-b} + \frac{\sqrt{ab}(a-b)}{a-b} =$$

$$= \frac{a^2 - a\sqrt{ab} + b\sqrt{ab} + b^2 + a\sqrt{ab} - b\sqrt{ab}}{a-b} =$$

$$= \frac{a^2+b^2}{a-b}$$

Svar: $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ $\left(\begin{array}{c} a, b \geq 0 \\ a \neq b \end{array}\right)$

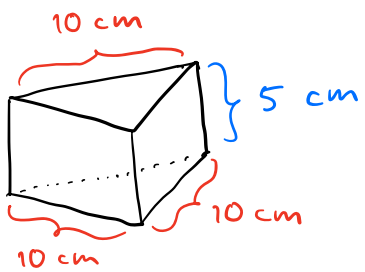
Uppgift 6: I ett rakt prisma är basytorna liksidiga trianglar med sidan 10 cm. Höjden är 5 cm.

a) Beräkna volymen.

b) Beräkna mantelarean.

c) I ett annat prisma, som är likformigt med det ovan givna, är höjden 10 cm. Hur stor är dess volym?

Lösning:



Den liksidiga triangeln som utgör basytorna har basen $b = 10$ cm och höjden

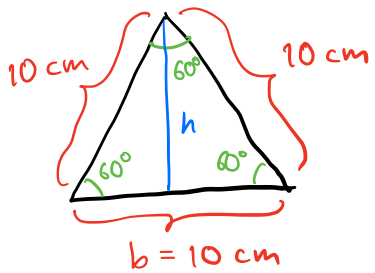
$$h = \sqrt{10^2 - 5^2}\ \text{cm} = \sqrt{75}\ \text{cm} =$$

$$= \sqrt{3 \cdot 25}\ \text{cm} = 5\sqrt{3}\ \text{cm}$$

enligt Pythagoras sats. Alternativt:

$$h = 10 \cdot (\sin 60°)\ \text{cm} =$$

$$= 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = 5\sqrt{3}\ \text{cm}$$



Basarean: $B = \frac{1}{2}bh =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3}\ \text{cm}^2 = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Volymen: $V = B \cdot 5\ \text{cm} = 125\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

Mantelytan består av tre rektanglar, vardera med sidorna 5 cm och 10 cm, och därmed arean 50 cm². Hela mantelarean blir därmed: $3 \cdot 50\ \text{cm}^2 = 150\ \text{cm}^2$.

Längdskalan är 2 då det första prismat avbildas på det andra. Volymskalan är kuben av längdskalan, alltså $2^3 = 8$.

Därmed är volymen av det likformiga prismat $8 \cdot 125\sqrt{3}\ \text{cm}^3 = 1000 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^3 = \sqrt{3}\ \text{dm}^3 = \sqrt{3}$ liter.

Svar: a) $125\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

b) $150\ \text{cm}^2$

c) $\sqrt{3}\ \text{dm}^3$

Uppgift 7: För varje reellt tal x, betrakta avstånden på tallinjen från x till 1, och från x till 3. Bestäm alla x sådana att summan av dessa två avstånd är lika med 2.

Lösning: $|x-1| + |x-3| = 2$

- Då $x < 1$:

$$|x-1| + |x-3| = 2 \iff$$
$$-(x-1) - (x-3) = 2 \iff$$
$$2x - 4 = -2 \iff x - 2 = -1$$
$$\iff x = 1 \notin (-\infty, 1)$$

Inga lösningar i intervallet!

- Då $1 \leq x < 3$:

$$|x-1| + |x-3| = 2 \iff$$
$$(x-1) - (x-3) = 2 \iff$$
$$-1+3 = 2 \iff 2 = 2$$

Uppfyllt för alla x i intervallet $[1, 3)$!

- Då $x \geq 3$:

$$|x-1| + |x-3| = 2 \iff$$
$$(x-1) + (x-3) = 2 \iff$$
$$2x - 4 = 2 \iff x - 2 = 1 \iff x = 3 \in [3, \infty)$$

En lösning i intervallet: $x = 3$!

Svar: Alla x i intervallet $[1, 3]$
$(1 \leq x \leq 3)$.

Uppgift 8a: Ange definitionen av en parabel utifrån brännpunkt och styrlinje.

Svar: Motsvarande parabel är mängden av alla punkter på samma avstånd från brännpunkten som från styrlinjen.

Uppgift 8b: Formulera och bevisa en ekvation som uppfylls av varje parabel i xy-planet där brännpunkten är $(0, c)$ och styrlinjen $y = -c$, där $c \neq 0$.

Lösning:

Avståndet från en punkt (x, y) till brännpunkten:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} = \sqrt{x^2+(y-c)^2}$$

Avståndet från en punkt (x, y) till styrlinjen:

$$|y-(-c)| = |y+c|$$

Om vi sätter dessa avstånd lika med varandra så får vi

$$|y+c| = \sqrt{x^2+(y-c)^2} \iff$$

$$(y+c)^2 = x^2+(y-c)^2 \iff$$

$$(y+c)^2-(y-c)^2 = x^2 \iff$$

$$\big((y+c)+(y-c)\big)\big((y+c)-(y-c)\big) = x^2 \iff$$

$$4yc = x^2 \overset{c\neq 0}{\iff} y = \frac{1}{4c}x^2 \iff y = kx^2$$

där $k = 1/4c \neq 0$.

Svar: Ekvationen $y = kx^2$ där $k \neq 0$ är en konstant. Bevis ovan.