Reglerteknik SSY052/SSY310

Tentamen 2026-06-04

Tid: 8:30 – 12:30
Lokal: Johanneberg

Lärare: Knut Åkesson, 0701-749525, Filip Rydin

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timme efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar totalt 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade och alla delsteg kunna följas.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Granskning* av rättning sker den *8:e* september kl. 12.15 – 13.15 (lokal anslås på kurshemsidan). Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- “Formelsamling Reglerteknik 2025”
- Bodediagram (dock ej lathund för att rita Bodediagram)
- Standardtabeller av typen Physics handbook, TEFYMA och Beta
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator/smartphone.
- För Erasmusstudenter är lexikon, till och från svenska, tillåtet.

Inga anteckningar är tillåtna!

1

Betrakta det dynamiska systemet nedan

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t)$$

a) Bestäm $y(t)$, $t > 0$, då $u(t) = \sigma(t)$ (enhetssteget), låt $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

(1p)

b) Bestäm $|G(j2)|$ och $\arg G(j2)$, där $G(s) = Y(s)/U(s)$ är systemets överföringsfunktion.

(1p)

c) Ange $y(t)$ stationärt (dvs för stora t) då $u(t) = \cos(2t)$.

(1p)

2

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^2}$$

ska regleras med en PI-regulator

$$F_{PI}(s) = K_i \frac{1 + T_i s}{s}.$$

Önskad överkorsningsfrekvensen är $\omega_c = 1.4$ rad/s.

a) Bestäm T_i så att fasmarginalen blir $\varphi_m = 50^\circ$ vid den ovan angivna överkorsningsfrekvensen.

(3p)

b) Bestäm K_i så att överkorsningsfrekvensen blir $\omega_c = 1.4$ rad/s. Om du inte löste a) kan du här anta att $T_i = 1.5$.

(2p)

c) Inför känslighetsfunktionen $S(s) = \dfrac{1}{1 + F_{PI}(s)G(s)}$. Bestäm $S(0)$ och kommentera vad värdet på $S(0)$ innebär för hantering av störningar, ange tydligt var störningen påverkar för att tolkningen av $S(0)$ ska bli korrekt.

(1p)

3

Betrakta det roterande systemet utan dämpning

$$\ddot{\theta}(t) = u(t)$$

där vinkeln $\theta(t)$ ska styras till önskat läge med hjälp av momentet $u(t)$. Antag att både vinkeln θ och vinkelhastigheten $\omega = \dot{\theta}$ är mätbara och därmed kan återkopplas.

a) Inför tillståndsåterkopplingen $u = -L_u x$ och bestäm återkopplingsmatrisen L_u så att det återkopplade systemet får poler i $s = -\alpha$ och $s = -2\alpha$.

(2p)

b) Studera kretsöverföringen $L(s) = L_u(sI - A)^{-1}B$ och rita ett bodediagram där frekvensaxeln normeras med α, dvs. uttryck L i den dimensionslösa frekvensen $v = \omega/\alpha$ och rita mot v (vilket gör diagrammet oberoende av α). Ange speciellt den normerade överkorsningsfrekvensen ω_c/α och den resulterande fasmarginalen φ_m. Kommentera hur fasmarginalen påverkas av det återkopplade systemets snabbhet. Om du inte löste a) kan du här anta att $L_u = [\alpha^2 \; 2\alpha]$.

(2p)

4

Betrakta det olinjära dynamiska systemet

$$\ddot{y}(t) = a\,y(t) - b\sin y(t) + c\,u(t)\cos y(t)$$

där $a, b, c > 0$ är konstanter, $u(t)$ är insignalen och $y(t)$ är utsignalen.

a) Välj lämpliga tillståndsvariabler och skriv systemet på olinjär tillståndsform $\dot{x} = f(x, u)$, $y = g(x, u)$.

(1p)

b) Bestäm den jämviktspunkt (jämviktstillstånd samt motsvarande konstanta insignal u_0) som svarar mot $y = 0$. Linjärisera därefter modellen kring denna punkt genom att beräkna Jacobianmatriserna och ange matriserna A, B och C för den linjäriserade modellen.

(2p)

c) Ange systemets poler (uttryckta i a och b) och diskutera hur det linjäriserade systemets stabilitet beror på relationen mellan a och b.

(1p)

5

En första ordningens process

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

ska regleras med en tidsdiskret I-regulator som ges av överföringsfunktionen

$$F_d(z) = \frac{K_i h}{z-1}$$

För att åstadkomma detta diskretiseras processmodellen med samplingsintervallet $h = 0.1$ med antagandet att datorn lägger ut en styckvis konstant styrsignal. Antag enhetlig negativ återföring.

a) Diskretisera processen $G(s)$ under antagandet om en styckvis konstant insignal och bestäm den motsvarande differensekvationen för utsignalen $y(kh)$.

(1p)

b) Bestäm integralförstärkningen K_i så att de båda polerna placeras som en dubbelpol. Om du inte lyckas bestämma det karakteristiska polynomet kan du anta att det är $z^2 - 1.6\,z + 0.63 + 0.02\,K_i$.

(2p)

c) Beräkna det kvarstående felet (reglerfelet då $k \to \infty$) då referenssignalen är ett enhetssteg. Du kan här använda den tidsdiskreta slutvärdessatsen

$$\lim_{k\to\infty} f(kh) = \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1})\, F(z),$$

giltig då gränsvärdet existerar (dvs. då $(z-1)F(z)$ har alla poler innanför enhetscirkeln).

(1p)

6

En instabil process med överföringsfunktionen $G(s) = \dfrac{1}{s(s-1)}$ ska regleras med en PD-regulator $F(s) = K_1(1 + K_2 s)$ i en återkopplad slinga med enhetlig negativ återföring, där vi antar att $K_1 > 0$ och $K_2 > 0$.

a) Bestäm med hjälp av Routh-Hurwitz stabilitetskriterium ett villkor mellan K_1 och K_2 som garanterar att det återkopplade systemet är stabilt.

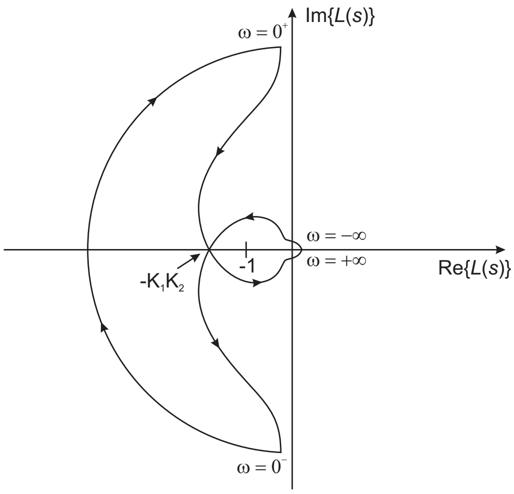
(2p)

b) Figuren nedan visar Nyquistkurvans utseende för kretsöverföringen $L(s) = F(s)G(s)$, där korsningen med negativa reella axeln är markerad med $-K_1K_2$ (positionen beror alltså på produkten K_1K_2, men kurvans kvalitativa form är densamma för positiva K_1, K_2). Använd Nyquists stabilitetskriterium för att avgöra stabiliteten i följande fall, och motivera varje slutsats med hänvisning till antalet RHP-poler hos $L(s)$ samt antalet omslutningar av -1:

(i) $K_1 = K_2 = 0.5$

(ii) $K_1 = K_2 = 2$

(2p)



Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1 (3p)

Systemet $\ddot{y} + \dot{y} = u$ ger med Laplacetransform och $y(0) = \dot{y}(0) = 0$

$$s^2 Y(s) + sY(s) = U(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)}.$$

a) Stegsvar (1p)

Med $U(s) = 1/s$ fås

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}.$$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}.$$

Invers Laplace ger

$$\boxed{y(t) = t - 1 + e^{-t}, \quad t > 0.}$$

b) $|G(j2)|$ och $\arg G(j2)$ (1p)

$$G(j2) = \frac{1}{j2\,(1+j2)} = \frac{1}{-4+j2}.$$

$$|G(j2)| = \frac{1}{\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \approx 0.224.$$

$$\arg G(j2) = -\arg(j2) - \arg(1+j2) = -90^\circ - \arctan(2) \approx -153.4^\circ.$$

c) Stationärt svar på $\cos(2t)$ (1p)

För ett stabilt system gäller att $u(t) = \cos(\omega t)$ ger $y_{\text{stat}}(t) = |G(j\omega)| \cos\Big(\omega t + \arg G(j\omega)\Big)$. Notera att systemet har en pol i $s = 0$, men cosinussignalen ger ändå en stationär periodisk lösning. Resultatet blir

$$\boxed{y_{\text{stat}}(t) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cos\Big(2t - 153.4^\circ\Big).}$$

Uppgift 2 (6p)

Process och PI-regulator:

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^2}, \qquad F(s) = K_i \frac{1+T_i s}{s}.$$

Vid $\omega_c = 1.4$ rad/s:

$$\angle G(j\omega_c) = -2\arctan(\omega_c) = -2\arctan(1.4) \approx -108.92°,$$

$$|G(j\omega_c)| = \frac{1}{1+\omega_c^2} = \frac{1}{2.96} \approx 0.338.$$

a) T_i för $\varphi_m = 50°$ (3p)

Fasmarginalvillkoret vid överkorsning:

$$\angle F(j\omega_c) + \angle G(j\omega_c) = -180° + \varphi_m = -130°.$$

Eftersom $\angle F(j\omega) = -90° + \arctan(\omega T_i)$ fås

$$\arctan(\omega_c T_i) = -130° - \angle G(j\omega_c) + 90° \approx -130° + 108.92° + 90° = 68.92°.$$

$$\omega_c T_i = \tan(68.92°) \approx 2.594 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_i \approx 1.85 \text{ s.}}$$

b) K_i så att $\omega_c = 1.4$ rad/s (2p)

Magnitudvillkoret $|F(j\omega_c)G(j\omega_c)| = 1$:

$$|F(j\omega_c)| = \frac{K_i}{\omega_c}\sqrt{1+(\omega_c T_i)^2} \quad \Rightarrow \quad K_i = \frac{\omega_c}{|G(j\omega_c)|\sqrt{1+(\omega_c T_i)^2}}.$$

Med $T_i \approx 1.85$ s från a):

$$K_i = \frac{1.4}{0.338 \cdot \sqrt{1+(1.4\cdot 1.85)^2}} = \frac{1.4}{0.338\cdot\sqrt{1+2.594^2}} = \frac{1.4}{0.338 \cdot 2.780} \approx 1.49.$$

$$\boxed{K_i \approx 1.49.}$$

Alternativt — med antagandet $T_i = 1.5$ s:

$$K_i = \frac{1.4}{0.338 \cdot \sqrt{1 + (1.4 \cdot 1.5)^2}} = \frac{1.4}{0.338 \cdot \sqrt{1 + 2.1^2}} = \frac{1.4}{0.338 \cdot 2.326} \approx 1.78.$$

$$\boxed{K_i \approx 1.78 \quad \text{(med ledningens } T_i = 1.5 \text{ s).}}$$

Observera: Värdet $T_i = 1.5$ (från ledningen) ger inte exakt fasmarginal 50° — vid $\omega_c = 1.4$ blir $\angle F(j\omega_c) = -90^\circ + \arctan(1.4 \cdot 1.5) \approx -25.5^\circ$, vilket ger $\varphi_m \approx 180^\circ - 108.92^\circ - 25.5^\circ \approx 45.6^\circ$ istället för 50°.

c) Känslighetsfunktion och störningsundertryckning (1p)

Kretsöverföringen $L(s) = F_{PI}(s)G(s)$ har en pol i $s = 0$ (integratorn i F_{PI}), så $L(0) \to \infty$ och

$$\boxed{S(0) = \frac{1}{1 + L(0)} = 0.}$$

Tolkning och störningens placering. Känslighetsfunktionen S är överföringsfunktionen från en störning som verkar vid processens utgång till utsignalen. Med en utgångsstörning d (och referens r) gäller

$$Y(s) = \underbrace{\frac{L(s)}{1 + L(s)}}_{T(s)} R(s) + \underbrace{\frac{1}{1 + L(s)}}_{S(s)} D(s),$$

så just för en utgångsstörning är $Y = S\,D$. Att $S(0) = 0$ betyder därför att en konstant (stegformad) störning vid utgången undertrycks fullständigt i stationärtillstånd:

$$y_\infty = \lim_{s \to 0} s\, S(s) \frac{1}{s} = S(0) = 0.$$

Detta är en direkt följd av integralverkan i regulatorn.

Det är väsentligt var störningen verkar för att tolkningen ska bli korrekt: avläsningen $S(0) = 0 \Rightarrow$ full undertryckning gäller för en utgångsstörning. Verkar störningen istället som en laststörning vid processens ingång blir överföringen $G(s)S(s)$, och man behöver då även att $G(0)$ är ändlig (här ger det visserligen också $G(0)S(0) = 0$, men $S(0)$ ensamt beskriver då inte undertryckningen).

Uppgift 3 (4p)

Processen $\ddot{\theta} = u$ ska styras genom återkoppling av både vinkel och vinkelhastighet.

a) Tillståndsåterkoppling för poler i $s = -\alpha,\ -2\alpha$ (2p)

Välj $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$. Med insignal u och utsignal $y = \theta$ blir tillståndsmodellen

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Med $u = -L_u x = -\ell_1 x_1 - \ell_2 x_2$ blir det återkopplade systemet

$$A_{cl} = A - BL_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\ell_1 & -\ell_2 \end{bmatrix}, \quad \det(sI - A_{cl}) = s^2 + \ell_2 s + \ell_1.$$

Jämför med $(s+\alpha)(s+2\alpha) = s^2 + 3\alpha s + 2\alpha^2$:

$$\boxed{L_u = \begin{bmatrix} 2\alpha^2 & 3\alpha \end{bmatrix}.}$$

b) Bode av $L(s)$ (2p)

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}.$$

$$L(s) = L_u(sI - A)^{-1}B = \frac{\ell_1}{s^2} + \frac{\ell_2}{s} = \frac{\ell_2 s + \ell_1}{s^2}.$$

Kurvan har genomgående <u>två integrationer</u> (-40 dB/dec) i origo och <u>ett nollställe</u> (vid $\omega = \ell_1/\ell_2$) som vrider upp lutningen till -20 dB/dec; fasen går från $-180°$ vid låga frekvenser till $-90°$ vid höga. Med normerad frekvens $v = \omega/\alpha$ blir $|L| = 1$ en andragradsekvation i v^2. Strukturen — och därmed svårighetsgraden — är densamma oavsett vilket L_u du använder; nedan visas lösningen både med ditt svar från a) och med det värde som anges i ledningen.

Med korrekt $L_u = \begin{bmatrix} 2\alpha^2 & 3\alpha \end{bmatrix}$ från a):

$$L(s) = \frac{3\alpha s + 2\alpha^2}{s^2}, \qquad L(j\alpha v) = -\frac{2+3jv}{v^2}, \qquad |L| = \frac{\sqrt{4+9v^2}}{v^2}.$$

Nollställe vid $\omega = 2\alpha/3$. Överkorsning ur $4 + 9v^2 = v^4$:

$$v^2 = \frac{9+\sqrt{97}}{2} \approx 9.42 \;\Rightarrow\; v_c \approx 3.07 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\omega_c}{\alpha} \approx 3.07.}$$

Fasmarginal:

$$\varphi_m = 180^\circ + \arg L(j\omega_c) = \arctan(3v_c/2) = \arctan(4.61) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_m \approx 78^\circ.}$$

Med ledningens $L_u = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \end{bmatrix}$ (om a) ej lösts):

$$L(s) = \frac{2\alpha s + \alpha^2}{s^2}, \qquad L(j\alpha v) = -\frac{1+2jv}{v^2}, \qquad |L| = \frac{\sqrt{1+4v^2}}{v^2}.$$

Nollställe vid $\omega = \alpha/2$. Överkorsning ur $1 + 4v^2 = v^4$:

$$v^2 = 2 + \sqrt{5} \approx 4.24 \;\Rightarrow\; v_c \approx 2.06 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\omega_c}{\alpha} \approx 2.06.}$$

Fasmarginal:

$$\varphi_m = 180^\circ + \arg L(j\omega_c) = \arctan(2v_c) = \arctan(4.12) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_m \approx 76^\circ.}$$

Observera: Värdet i ledningen, $L_u = [\alpha^2 \;\; 2\alpha]$, motsvarar en dubbelpol i $s = -\alpha$ och ger därför inte samma svar som den korrekta polplaceringen i a). Har du använt ledningen blir alltså ditt svar $\omega_c/\alpha \approx 2.06$ och $\varphi_m \approx 76^\circ$.

Effekt av snabbhet. Den normerade Bodekurvan är oberoende av α, alltså är fasmarginalen invariant under ändringar av α. Man kan göra systemet godtyckligt snabbt (större α) utan att försämra stabilitetsmarginalen.

Uppgift 4 (4p)

Givet systemet

$$\ddot{y}(t) = a\,y(t) - b\sin y(t) + c\,u(t)\cos y(t), \qquad a, b, c > 0.$$

a) Olinjär tillståndsform (1p)

Båda nedanstående (triviala) val av tillståndsvariabler är giltiga; de skiljer sig bara genom ordningen på tillstånden.

Val 1: $x_1 = y$**,** $x_2 = \dot{y}$**.**

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a\,x_1 - b\sin x_1 + c\,u\cos x_1, \\ y = x_1, \end{cases}} \qquad f(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ a\,x_1 - b\sin x_1 + c\,u\cos x_1 \end{bmatrix}, \; g(x,u) = x_1.$$

Val 2: $x_1 = \dot{y}$**,** $x_2 = y$**.**

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = a\,x_2 - b\sin x_2 + c\,u\cos x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ y = x_2, \end{cases}} \qquad f(x,u) = \begin{bmatrix} a\,x_2 - b\sin x_2 + c\,u\cos x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \; g(x,u) = x_2.$$

I det följande (b och c) används Val 1.

b) Linjärisering via Jacobianer (2p)

Jämviktspunkt. Vid jämvikt gäller $f(x_0, u_0) = 0$. Med $y_0 = x_{10} = 0$ och $x_{20} = 0$ fås

$$f_1(0,0,u_0) = 0 \quad \text{(automatiskt)}, \qquad f_2(0,0,u_0) = a\cdot 0 - b\cdot 0 + c\,u_0\cdot 1 = c\,u_0.$$

För jämvikt krävs alltså $u_0 = 0$. Arbetspunkten är $(x_{10}, x_{20}, u_0) = (0,0,0)$.

Jacobianer (allmänt). Den linjäriserade modellen är $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$, $\tilde{y} = C\tilde{x}$ med

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}, \quad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0}, \quad C = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}.$$

Beräkna deriverorna allmänt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a - b\cos x_1 - c\,u\sin x_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ c\cos x_1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Insättning av arbetspunkten $(0,0,0)$. Vid $x_1 = 0$, $u = 0$ blir $\cos x_1 = 1$ och $\sin x_1 = 0$:

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(0,0,0)} = a - b\cdot 1 - c\cdot 0\cdot 0 = a - b, \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{(0,0,0)} = c\cdot 1 = c.$$

Resultat:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a-b & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.}$$

c) Poler och stabilitet (1p)

$$\det(sI - A) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ -(a-b) & s \end{bmatrix} = s^2 - (a-b) = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm\sqrt{a-b}.$$

Stabiliteten beror på tecknet hos $a - b$:

- **$a > b$:** En pol vid $s = +\sqrt{a-b} > 0$ ligger i högra halvplanet. Systemet är <u>instabilt</u> (den linjära ay-termen dominerar över återställande $-b\sin y$).
- **$a < b$:** Polerna $s = \pm j\sqrt{b-a}$ ligger på imaginära axeln. Systemet är <u>marginellt stabilt</u> (odämpad oscillator).
- **$a = b$:** Dubbelpol i $s = 0$. Systemet är <u>instabilt</u> (algebraisk växt).

Uppgift 5 (4p)

Process $G(s) = 1/(s+1)$, samplingsintervall $h = 0.1$, regulator $F_d(z) = K_i h/(z-1)$.

a) Differensekvation (1p)

ZoH-diskretisering ger den tidsdiskreta överföringsfunktionen

$$G_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\}.$$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-h}} = \frac{z(1-e^{-h})}{(z-1)(z-e^{-h})} \quad \Rightarrow \quad G_d(z) = \frac{1-e^{-h}}{z-e^{-h}}.$$

Med $h = 0.1$ ($e^{-0.1} \approx 0.9048$): $G_d(z) \approx \dfrac{0.0952}{z - 0.9048}$.

Korsmultiplikation $(z - e^{-h})Y(z) = (1 - e^{-h})U(z)$ och tolkning av z som ett framåtskift ($zY(z) \leftrightarrow y((k+1)h)$) ger differensekvationen

$$\boxed{y\Big((k+1)h\Big) = e^{-h}\, y(kh) + (1 - e^{-h})\, u(kh),}$$

dvs. med $h = 0.1$

$$\boxed{y\Big((k+1)h\Big) = 0.9048\, y(kh) + 0.0952\, u(kh).}$$

b) Karakteristiskt polynom och K_i för dubbelpol (2p)

Med enhetlig negativ återföring: $1 + F_d(z)G_d(z) = 0$:

$$(z-1)(z-e^{-h}) + K_i h(1 - e^{-h}) = 0.$$

Insatt $h = 0.1$:

$$\boxed{z^2 - 1.905\, z + 0.905 + 0.00952\, K_i = 0.}$$

En dubbelpol fås genom jämförelse med $(z - z_0)^2 = z^2 - 2z_0 z + z_0^2$: först $z_0 =$ (koefficienten framför z)/2, därefter $z_0^2 =$ (konstanttermen). Notera att eftersom K_i endast påverkar konstanttermen (inte z-koefficienten) bestäms dubbelpolens läge z_0 helt av z-koefficienten och kan inte väljas fritt; K_i är den enda fria parametern och ställs in så att diskriminanten blir noll. Räkningen är likadan oavsett polynom; nedan visas lösningen både med det korrekta polynomet och med det polynom som anges i ledningen.

Med korrekt polynom $z^2 - 1.905z + 0.905 + 0.00952K_i$:

$2z_0 = 1.905 \Rightarrow z_0 = 0.9525, \qquad z_0^2 = 0.9073 = 0.905{+}0.00952\,K_i \Rightarrow \boxed{K_i \approx 0.24 \ \ (z_0 \approx 0.953).}$

Med ledningens polynom $z^2 - 1.6z + 0.63 + 0.02K_i$ (om polynomet ej bestämts):

$2z_0 = 1.6 \Rightarrow z_0 = 0.8, \qquad z_0^2 = 0.64 = 0.63 + 0.02\,K_i \Rightarrow \boxed{K_i = 0.5 \ \ (z_0 = 0.8).}$

Observera: Polynomet i ledningen är inte det korrekta karakteristiska polynomet och ger därför ett annat svar. Har du använt ledningen blir alltså ditt svar $K_i = 0.5$ (med $z_0 = 0.8$).

c) Kvarstående fel för stegreferens (1p)

Reglerfelet vid återkoppling är

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + L(z)}, \qquad L(z) = F_d(z)G_d(z).$$

Diskreta slutvärdessatsen ger

$$e_\infty = \lim_{z\to 1}(z-1)\,\frac{E(z)}{z} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{1+L(z)}\cdot\frac{(z-1)\,R(z)}{z}.$$

För stegreferens $R(z) = z/(z-1)$ blir $(z-1)R(z)/z = 1$, så

$$e_\infty = \lim_{z\to 1}\frac{1}{1+L(z)}.$$

Eftersom $F_d(z) = K_i h/(z-1)$ har en pol i $z = 1$ (diskret integrator) gäller $L(z) \to \infty$ när $z \to 1$, och därmed

$$\boxed{e_\infty = 0.}$$

Det kvarstående felet vid en stegformad referens är alltså noll.

Uppgift 6 (4p)

Process och regulator:

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)}, \qquad F(s) = K_1(1 + K_2 s), \quad K_1, K_2 > 0.$$

a) Routh-Hurwitz (2p)

Med negativ enhetsåterkoppling fås det karakteristiska polynomet ur $1+F(s)G(s) = 0$:

$$s(s-1) + K_1(1+K_2 s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + (K_1K_2 - 1)s + K_1 = 0.$$

För andra ordningens polynom $s^2 + as + b$ krävs $a > 0$ och $b > 0$:

$$K_1K_2 - 1 > 0 \quad \text{och} \quad K_1 > 0.$$

Eftersom $K_1 > 0$ är givet:

$$\boxed{K_1K_2 > 1.}$$

b) Stabilitet via Nyquist för två fall (2p)

Kretsöverföringen $L(s) = K_1(1+K_2s)/(s(s-1))$ har antalet RHP-poler $P = 1$ (polen i $s = 1$).

Bestäm korsningen med negativa reella axeln. Med

$$L(j\omega) = \frac{K_1(1+jK_2\omega)}{j\omega(j\omega - 1)} = \frac{K_1}{1+\omega^2}\left[-(1+K_2) + j\frac{1-K_2\omega^2}{\omega}\right]$$

fås imaginärdelen $= 0$ vid $\omega_\pi = 1/\sqrt{K_2}$, där

$$L(j\omega_\pi) = -K_1K_2.$$

Nyquists kriterium kräver $Z = N + P = 0$ för stabilitet, där N är antalet medurs omslutningar av -1. Med $P = 1$ krävs alltså en motsols omslutning ($N = -1$). Detta inträffar precis när korsningen ligger till vänster om -1, dvs $K_1K_2 > 1$.

(i) $K_1 = K_2 = 0.5$**, dvs** $K_1K_2 = 0.25$**:** Korsning vid -0.25, till höger om -1. Kurvan omsluter ej -1, alltså $N = 0$. $Z = N + P = 0 + 1 = 1$ — en pol i RHP för det slutna systemet. **Instabilt.**

(ii) $K_1 = K_2 = 2$**, dvs** $K_1K_2 = 4$**:** Korsning vid -4, till vänster om -1. Kurvan omsluter -1 motsols en gång, dvs $N = -1$. $Z = N + P = -1 + 1 = 0$ — inga RHP-poler. **Stabilt.**

Sammanfattningsvis: stabilitet erhålls iff $K_1K_2 > 1$, vilket överensstämmer med Routh-Hurwitz i a).