

Tentamen: Matematisk analys

GRADERINGS KRITERIER

2021-06-08, 14:00-18:00/20:00

Grupp 1: G frågor (8 x 3p)

Alla kriterier has samma mal		
+moment	p poäng	förklaring vad momenten handlar om
+/-moment	p/2 poäng	om bara en del av moment har klarats
-moment	0 poäng	om hela momenten saknas

1. Vad är realdelen och imaginärdelen av z ? Svaret skall inte innehålla trigonometriska funktioner.

$$z = \frac{(2 + i) \left(e^{120\pi i + \frac{\pi}{2}i} - e^{\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)i} \right)}{1 - i^{8 \cdot n + 11}}$$

Problemet är konstruerat för att testa olika kunskaper

moment	poäng	beskrivning
+poti	0.5	korrekt uträkning av enkla potenser i form i^{tal}
+mod4	0.5	Att kunna nyttja tekniken att omvandla i^m till $i^{4k+l} = (i^4)^k i^l = i^l$
+pf	0.5	Att tänka en klar visualisering av problemet med omgående fokus på enhets cirkeln och funderingar kring vart man hamnar om man kör i steg av pi eller pi/2 osv; att använda Euler formeln och hålla på med räknaren för att räkna sin eller cos av olika vinklar är någonting som jag inte skulle vilja se; man skall kunna räkna fort med $\exp(n \text{ i pi})$ eller $\exp(n \text{ i pi/2})$! Då har man förtjänat sina 0.5 poäng.
+alg	0.5	Att kunna utföra grundläggande algebraiska steg med komplexa tal i $x+yi$ form, tex korrekt uträkning $(1 + i)(1 - i)$
+fk	0.5	Att kunna förlänga med konjugat
+abs	0.5	Användning av $ z ^2 = x^2 + y^2$ i täljaren för zz^*

2. Visa hur man väljer konstanten a så att gränsvärdet blir noll.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^3 + x^2 + 5}{x^2 - ax + 11} - (2x + 7) \right] = 0$$

Det finns två metoder som går att använda och bara två. Metod 1: skriv om uttrycket till gemensam nämnare och balansera termer. Metod 2: använd polynomdivision. Ibland studenter "kokar upp" sina egna tolkningar/metoder men detta ger inga poäng. Problemet går inte på att examinera en allmän känsla om vad gränsvärdet är (detta hör till gymnasiet matematik men inte i en analyskurs på Chalmers), men går på att examinera metoden som man antingen känner till eller inte.

3. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3 - 8}$$

+lhv	0.5	LH villkoret (LHV) specificerat när vi kan använda LH regeln
+lhp	1.0	LH regeln påbörjat på ett korrekt sätt (separata derivator på täljaren och nämnaren)
+derN	0.5	korrekta derivatan av nämnaren
+derT	0.5	korrekta derivatan av täljaren
+knu	0.5	korrekt numerisk uträkning

4. Bestäm konstanten c så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} & x \neq 1 \\ c & x = 1 \end{cases}$$

är kontinuerlig i R . (a) Förklara först varför funktionen är kontinuerlig i alla $x \neq 1$. (b) Förklara sedan hur du kan välja c att funktionen är kontinuerlig i $x = 1$. Ange villkoret för kontinuitet och visa tydligt hur du använder villkoret för kontinuitet för att lösa problemet. För (a) och (b) glöm inte att nämna matematiska satser som är viktiga i sammanhanget och diskutera hur du använder de.

+kks	1.5	tillämpningen av "kombinera kontinuerliga funktioner" satsen (KKF) för alla punkter $x \neq 1$ från satsen om hur man kombinerar kontinuerliga funktioner; viktig var att ange satsen och sedan visa hur man använder den; som jag sa under FÖ under kursen jagar vi lite extra formalia om man jämför med gymnasiet matematik och här är det tillfället att visa att man kan använda matematiska satser
+kv	0.5	kontinuitets villkor tydligt specificerad och tillämpad; $c = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
+gv	1.0	gränsvärdet räknat korrekt
und1	0.5	Undantag: om man inte angav satsen men indirekt visade att man känner till satsen och det var tydligt diskuterat hur den används
und2	0p	Undantag: om man argumenterar att kontinuitet har med "att vara definierad" att göra får man inga poäng, alltså om man håller sig på rent gymnasiet nivån (för vilka tal räknaren kraschar), nu när den förmåla nivån mycket högre

5. Beräkna $f\left(1 + \frac{1}{100}\right)$ i linjär approximation (utan att använda räknaren). Använd $x = 1$ som referenspunkt.

$$f(x) = 2x + e^{(x-1)^2} + \ln x$$

+pho	0.5p	att på något sätt visa att man vet vad problemet handlar om (att räkna numerisk direkt visar att man vet inte ens vad problemet handlar om)
+met	1.0p	rätt tillämpning av metoden; att man räknar på ett strukturerat sätt tex att tydlig visar hur $f(1)$ och $f'(1)$ och dx används
+der	1.5p	Korrekta tre termer i $f'(1)$

6. Funktionen f är definierad som nedan. Beräkna $f'(x)$. Uttrycket går inte att förenkla (förlora inte tid på att försöka förenkla).

$$f(x) = \frac{x^2}{\sin x} + x \sinh \sqrt{x} + (1-x)^{100}$$

+dkvot	0.5p	Att kunna använda derivatakvotregel
+dprod	0.5p	Att kunna använda derivataadditionsregel
+dsum	0.5	Samma för summa regel eller differens
+kedje	0.5p	Samma för kedjeregeln
+dtrig	0.5	Att kunna derivata av trig funktioner
+dhyp	0.5	Att kunna derivata av hyperboliska funktioner

7. Beräkna derivatan $\frac{dy}{dx}$ i punkten $x = 1$ och $y = 1$. Funktionen definieras som nedan. Använd implicit derivering.

$$32yx^3 = (x + y)^5$$

+deq	0.5p	man räknar på ett korrekt sätt VS'=HS'
+dVS	1.0p	derivatan av vänster sida är korrekt
+dHS	1.0p	derivatan av den första termen på höger sida är korrekt
+knu	0.5p	ekvation för y' med korrekt numerisk uträknings process för att hitta lösningen

8. Omvandla alla uttryck till en form $A(x) + B(x) dx$. Notera att A och B kommer att variera från fall till fall. Ange också storleksordning för varje fall (TAS0 eller TAS1).

- (a) $d(x^7) = ?$
 (b) $\sin((x + dx)^3) - \sin(x^3) = ?$
 (c) $\sqrt{x + dx} \ln(x + dx) = ?$

Det här problemet är vad skiljer gymnasie matematik från universitet. Problemet examinerar följande kunskaper

moment	poäng	beskrivning
+TAS	0.5	Att kunna skilja mellan TAS0 och TAS1 termer
+gdr	1.0	Att känna till och kunna använda den grundläggande differential regeln (GDR): $df = f' dx$
+gdr1	0.5	Del (a) helt rätt
+gdr2	0.5	Del (b) helt rätt
+gdr3	0.5	Del (c) helt rätt

Grupp 2: VG frågor (3 x 4p)

9. Hur kan du välja $f(x)$ så att ekvationen nedanför stämmer? Använd en variabelsubstitution som passar problemet. Notera att integral på den högra sida går inte att räkna, men vi kan hitta $f(x)$ ändå. Visa hur.

$$\int f(x) \tanh(x+2) dx = \int e^{(u+3)^2} \tanh(u+1) du$$

rätt eller fel, inte så många moment att ge poäng för; ganska enkel problem egentligen; om man räknade höger sidan explicit fick man inga poäng (det här är inte G problem).

10. En ingenjör löser en icke-linjär DE med begynnelsevillkoren $y(0) = 3$ och $y'(0) = 3 \ln 3$ och får det här uttrycket

$$y(x) = \frac{1}{9} a^{\int e^x dx}$$

som vi inte ifrågasätter. Vi antar att uträkningen är korrekt hittills. Men, hen *resonerar* på följande sättet som inte är rätt. *Vi vet att $\int e^x dx = e^x$ och därifrån vet vi att $y(x) = \frac{1}{9} a^{e^x}$. Vi kan bestämma den fria konstanten som vanligt: $3 = y(0) = \frac{a}{9}$ (för $e^0 = 1$) som ger $a = 27$ och $y(x) = 27e^x$. Men, det andra villkoret $3 \ln 3 = y'(0)$ kan man inte få att stämma. Alltså, problemet går inte att lösa.* Identifiera alla fel i uträkningen. **Visa hur man gör rätt!**

2p +mal: korrekta formen för $y(x)$ med två fria konstanter; +/- om bara en konstant (hälften av poäng)

- **1p +rve:** randvillkor ekvationer; ekvation system specificerad
- **1p +num:** numeriska lösningen är korrekt

11. Lös differentialekvationen $\sqrt{1-x^2}y' = \sqrt{1-y^2}$ med begynnelsevillkoret $y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Använd separationstekniken för att hitta lösningen i implicit form. Lösningen går att omvandla så att alla trigonometriska funktioner försvinner. Gör det snälla.

- **1p +met:** metoden demonstrerat att man behöver integrera VS och HS; integraler räknade korrekt; att kunna detta ingår i G - nivå
- **1p +mal:** korrekt lösning i implicit form: mallen påvisat $y = \arcsin(x+c)$ och den fria konstanten c har räknats på ett korrekt sätt; typisk VG moment
- **2p +omv:** omvandling till en form utan trigonometriska funktioner

Grupp 3: MVG frågor (2 x 7p)

12. ingen student har försökt lösa problemet

13. ingen student har försökt lösa problemet