

LÖSNINGSFÖRSLAG TENTA 2022-08-23

1. (a) Vi observerar att både $\sqrt{x - \sqrt{x}}$ och $\sqrt{x}$ växer mot oändligheten när x blir stort och således måste vi avgöra hur mycket dessa två termer tar ut varandra för att kunna förstå vad gränsvärdet blir. Vi använder konjugatregeln för att skriva om uttrycket:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x - \sqrt{x}} - \sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x - \sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x - \sqrt{x}} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x - \sqrt{x}} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x - \sqrt{x}} + \sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Vi kan nu bryta ut $\sqrt{x}$ ur nämnaren som ger oss att

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x - \sqrt{x}} + \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1}.\end{aligned}$$

Slutligen använder vi att $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ när $x \rightarrow \infty$, att funktionen $y \mapsto \sqrt{y}$ är kontinuerlig i $y = 1$, och våra räkneregler för gränsvärden för att se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = -\frac{1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}.$$

Svar: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x - \sqrt{x}} - \sqrt{x} = -\frac{1}{2}.$

(b) I detta gränsvärde ser vi att nämnaren antar värdet noll i den relevanta punkten $x = 3$ vilket gör uttrycket odefinierat där. Vi faktorerar polynomen i nämnare och täljare var för sig:

$$x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3) \quad \text{och} \quad x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1).$$

Vi finner att för alla $x \neq 3$ så har vi att

$$\frac{x^3 - 9x}{e^{-x}(x^2 - 2x - 3)} = \frac{x(x - 3)(x + 3)}{e^{-x}(x - 3)(x + 1)} = \frac{x(x + 3)}{e^{-x}(x + 1)}.$$

Då både täljare och nämnare i bråket $\frac{x(x+3)}{e^{-x}(x+1)}$ är kontinuerliga funktioner och nämnaren är skild från noll nära $x = 3$ gäller det att $x \mapsto \frac{x(x+3)}{e^{-x}(x+1)}$ är väldefinierad och kontinuerlig

kring $x = 3$. Alltså har vi visat att

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9x}{e^{-x}(x^2 - 2x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+3)}{e^{-x}(x+1)} = \frac{3(3+3)}{e^{-3}(3+1)} = \frac{9e^3}{2}.$$

Svar: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9x}{e^{-x}(x^2 - 2x - 3)} = \frac{9e^3}{2}.$

2. Integralen är generaliserad för att integrationsområdet är obegränsat. Notera att integranden $\frac{1}{x \ln(x)^2}$ är kontinuerlig och begränsad på hela intervallet (e, ∞) så integralen är endast generaliserad av denna anledning. Enligt definitionen är integralen konvergent om och endast om gränsvärdet

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_e^R \frac{1}{x \ln(x)^2} dx$$

existerar, och i så fall ger detta gränsvärdet även integralens värde.

För att hitta gränsvärdet behöver vi beräkna integralen $\int_e^R \frac{1}{x \ln(x)^2} dx$ för ett godtyckligt $R > e$. Genom variabelbytet $y = \ln(x)$ finner vi att

$$\int_e^R \frac{1}{x \ln(x)^2} dx = \int_1^{\ln(R)} \frac{1}{y^2} dy = \left[-\frac{1}{y} \right]_1^{\ln(R)} = 1 - \frac{1}{\ln(R)}.$$

Då $\ln(R) \rightarrow \infty$ då $R \rightarrow \infty$ ser vi att

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_e^R \frac{1}{x \ln(x)^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{\ln(R)} = 1.$$

Således har vi visat att den sökta integralen är konvergent och dess värde är 1.

Svar: $\int_e^\infty \frac{1}{x \ln(x)^2} dx = 1.$

3. På de tre delintervallen $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4})$ och $(\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$ ges f som en kombination av elementära funktioner som vi vet är både kontinuerliga och deriverbara där de är definierade. Således är f kontinuerlig och deriverbar i alla punkter i $(0, \frac{\pi}{2})$ och $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4})$ och $(\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$. Det återstår att undersöka de kvarvarande punkterna $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$ och 2π .

(a) Enligt definitionen av kontinuitet är funktionen f kontinuerlig i en punkt a om och endast om $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Så vi behöver kontrollera om detta stämmer för $a = \frac{\pi}{2}$, $a = \frac{5\pi}{4}$ och $a = 2\pi$.

I punkten $\frac{\pi}{2}$ har vi att $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2 \cos(\frac{\pi}{2})^2}{\frac{\pi}{2}} + 1 = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2 \cos(x)^2}{x} + 1 = \frac{2 \cos(\frac{\pi}{2})^2}{\frac{\pi}{2}} + 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sin(x)^2 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1,$$

där vi använde att $x \mapsto \frac{2 \cos(x)^2}{x} + 1$ och $x \mapsto \sin(x)^2$ båda är kontinuerliga funktioner i $\frac{\pi}{2}$. Då höger- och vänstergränsvärdet sammanfaller så har vi att $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$. Då detta värde stämmer överens med funktionsvärdet i $\frac{\pi}{2}$ så har vi visat att f även är kontinuerlig i $\frac{\pi}{2}$.

I punkten $\frac{5\pi}{4}$ har vi att $f(\frac{5\pi}{4}) = \frac{5\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}^-} \sin(x)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}^+} x - \frac{5\pi}{4} = 0.$$

Där vi använde kontinuiteten av de elementära funktionerna $x \mapsto \sin(x)^2$ och $x \mapsto x - \frac{5\pi}{4}$. Då höger- och vänstergränsvärdet inte sammanfaller så existerar gränsvärdet inte gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}} f(x)$ och funktionen f är därför inte kontinuerlig i $\frac{5\pi}{4}$.

För punkten 2π finns det bara en riktning från vilken vi kan närma oss och kontinuiteten av f följer från kontinuiteten av $x \mapsto x - \frac{5\pi}{4}$:

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} x - \frac{5\pi}{4} = 2\pi - \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = f(2\pi).$$

Svar: f är kontinuerlig på $(0, \frac{5\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$, d.v.s. på hela dess definitionsmängd förutom punkten $\frac{5\pi}{4}$.

(b) Enligt definitionen är en funktion f deriverbar i en punkt a i det inre av sin definitionsmängd om och endast om gränsvärdet $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existerar. Då 2π inte är en inre punkt i $(0, 2\pi]$ så återstår det att undersöka deriverbarheten av f i de två punkterna $\frac{\pi}{2}$ och $\frac{5\pi}{4}$. Men då vi visat i kursen att om en funktion är deriverbar i en punkt så är den kontinuerlig där så kan vi från vårt svar på (a) inse att f inte är deriverbar i $\frac{5\pi}{4}$ (då f inte är kontinuerlig där).

För att kontrollera om f är deriverbar i $\frac{\pi}{2}$ undersöker vi det relevanta gränsvärdet genom att beräkna höger- och vänstergränsvärdena separat. Vi vill beräkna

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\frac{\pi}{2} + h) - f(\frac{\pi}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\left(\frac{2\cos(\frac{\pi}{2}+h)^2}{\frac{\pi}{2}+h} + 1\right) - 1}{h}$$

och

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\pi}{2} + h) - f(\frac{\pi}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + h)^2 - 1}{h}.$$

Dessa gränsvärden går att beräkna på flera olika vis som vi jobbat med i kursen (till exempel med hjälp av l'Hopitals sats). Jag väljer att beräkna dem genom att känna igen dem som gränsvärden som definierar derivatan för funktioner vi vet hur man deriverar, nämligen $g(x) = \frac{2\cos(x)^2}{x} + 1$ och $r(x) = \sin(x)^2$. Vi vet att både g, r är deriverbara i $x = \frac{\pi}{2}$ då de definieras som kombinationer av elementära funktioner. Enligt våra deriveringsregler finner vi att

$$g'(x) = \frac{-4\sin(x)\cos(x)x - 2\cos(x)^2}{x^2} \quad \text{och} \quad r'(x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

Därför är $g'(\frac{\pi}{2}) = 0$ och $r'(\frac{\pi}{2}) = 0$. Enligt definitionen av derivata har vi att

$$0 = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\frac{\pi}{2} + h) - g(\frac{\pi}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2\cos(\frac{\pi}{2}+h)^2}{\frac{\pi}{2}+h} + 1\right) - 1}{h}$$

och likaså är

$$0 = r'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(\frac{\pi}{2} + h) - r(\frac{\pi}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + h)^2 - 1}{h}.$$

Vi ser därför att de gränsvärdena som vi vill beräkna ovan båda existerar och har värdet 0. Således har vi visat att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{\pi}{2} + h) - f(\frac{\pi}{2})}{h} = 0,$$

så f är deriverbar i $\frac{\pi}{2}$ med $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Svar: f är deriverbar på $(0, \frac{5\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$.

4. (a) Vi vill skriva z på formen $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ för något tal θ . Då vi kan skriva z som $2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ser vi att vi kan ta $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Svar: $z = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$.

(b) Enligt de Moivres formel så är $(2(\cos(\theta) + i \sin(\theta)))^n = 2^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$ för varje $n \in \mathbb{Z}$ och $\theta \in \mathbb{R}$. Genom att applicera detta med $n = 119$ och använda vårt svar från (a) att finner vi att $119\frac{2\pi}{3}$ är ett värde för argumentet av z^{119} . Då de olika värdena på argumentet skiljer sig med heltalsmultipler av 2π och $119\frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 120\frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 80\pi$ finner vi att det sökta argumentet är $-\frac{2\pi}{3}$.

Svar: Det sökta argumentet är $-\frac{2\pi}{3}$.

(c) Låt w uppfylla ekvationen $w^4 = z$. Om vi skriver w på polär form som $|w|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ för något $\varphi \in \mathbb{R}$ kan vi med hjälp av de Moivres formel skriva ekvationen som

$$|w|^4(\cos(4\varphi) + i \sin(4\varphi)) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Den ekvationen gäller om och endast om $|w|^4 = 2$ och $4\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Vi har därför visat att argumentet av w , d.v.s. φ , måste uppfylla att

$$\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

för något $k \in \mathbb{Z}$. Likaså har vi funnit att för varje $k \in \mathbb{Z}$ finns det en lösning w till ekvationen $w^4 = z$ med argument $\varphi_k = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ (nämligen $w_k = 2^{1/4}(\cos(\varphi_k) + i \sin(\varphi_k))$). (Notera att olika värden av $k \in \mathbb{Z}$ kan motsvara samma lösning, det gäller nämligen för varje $k \in \mathbb{Z}$ att $w_k = w_{k+4}$.)

Svar: Om w löser $w^4 = z$ kan argumentet för w skrivas som $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ för något $k \in \mathbb{Z}$.

5. (a) Ekvationen är en linjär första ordningens differentialekvation med icke-konstanta koefficienter. Vi löser ekvationen med hjälp av att hitta den integrerande faktorn.

Då $(-2 \sin(t))' = -2 \cos(t)$ finner vi att om vi multiplicerar ekvationen med $e^{-2 \sin(t)}$ så kan den skrivas som

$$\left(u(t)e^{-2 \sin(t)}\right)' = e^{-2 \sin(t)}(u'(t) - 2 \cos(t)u(t)) = e^{-2 \sin(t)} \cos(t).$$

Om vi tar primitiva funktioner av bägge sidor av denna ekvationen ser vi att

$$u(t)e^{-2 \sin(t)} = \int e^{-2 \sin(t)} \cos(t) dt = \int (-e^{-2 \sin(t)}/2)' dt = -e^{-2 \sin(t)}/2 + C,$$

för någon konstant C . Vilket är ekvivalent med att

$$u(t) = Ce^{2 \sin(t)} - \frac{1}{2}.$$

Svar: Lösningarna till differentialekvationen ges av $u(t) = Ce^{2\sin(t)} - \frac{1}{2}$ för någon val av konstanten C .

(b) Om u är en lösning så har vi från (a) att $u(0) = Ce^{2\sin(0)} - \frac{1}{2} = C - \frac{1}{2}$. Likaså är

$$u'(t) = 2C \cos(t)e^{2\sin(t)} \quad \text{och således är} \quad u'(0) = 2C.$$

Villkoret $u'(0) = u(0)$ kan därav skrivas som

$$2C = C - \frac{1}{2}$$

som vi ser har den unika lösningen $C = -\frac{1}{2}$.

Svar: Ja det finns en sådan lösning, nämligen $u(t) = -\frac{e^{2\sin(t)}}{2} - \frac{1}{2}$.

(c) På samma sätt som i (b) kan villkoret $u'(0) = 2u(0)$ skrivas som

$$2C = 2\left(C - \frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -1$$

så det finns inga sådana lösningar.

Vi observerar att detta kan ses direkt från differentialekvationen: om $u'(0) = 2u(0)$ så blir vänsterledet i ekvationen vid $t = 0$

$$u'(0) - 2\cos(0)u(0) = 2u(0) - 2u(0) = 0$$

men högerledet blir

$$\cos(0) = 1,$$

och då $0 \neq 1$ så är detta en motsägelse.

Svar: Nej, det finns ingen sådan lösning.

6. Låt $h(t)$ vara höjden av vattenytan som en funktion av tiden t och låt $V(h)$ vara funktionen som beskriver volymen av vattnet när ytan har höjden h cm. Det vi vill räkna ut är $h'(t)$ vid den tiden sådan att $h(t) = 10$ cm.

Från uppgiften vet vi att volymen vatten i behållaren förändras med konstant hastighet $20 \text{ cm}^3/\text{s}$ vilket innebär att

$$\frac{d}{dt}(V(h(t))) = 20 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Med hjälp av kedjeregeln kan detta skrivas som $V'(h(t))h'(t) = 20 \text{ cm}^3/\text{s}$. Här ser vi att $h'(t)$ dyker upp vilket är bra, för det är just denna derivatan vi önskar beräkna. Om vi bryter ut $h'(t)$ ur ekvationen finner vi förhållandet

$$h'(t) = \frac{20}{V'(h(t))} \text{ cm/s.}$$

För att kunna få fram derivatan vid rätt tidpunkt behöver vi förstå vad $V'(h(t))$ är vid den tiden då $h(t) = 10 \text{ cm}$, d.v.s. $V'(10)$ (notera att vi inte behöver veta någonting om vid vilken tid detta händer).

Än så länge har vi inte använt att vi vet något om tvärsnittsarean av behållaren. Men som vi sett i kursen kan man skriva volymen av en kropp som integralen av arean av tunna skivor av denna kroppen, vilket i vårt fall innebär att

$$V(h) = \int_0^h A(s) ds.$$

Eftersom vi har fått A givet som en funktion av höjden kan man beräkna denna integralen, och sedan derivata det uttrycket man får med avseende på h för att finna den sökta derivatan. Men det är smidigare att använda analysens huvudsats som direkt ger oss att

$$V'(h) = A(h) = \pi h(2 + \sin(\pi h)) \text{ cm}^2.$$

Så enligt ovan får vi att vid den tiden då $h(t) = 10 \text{ cm}$ så gäller det att

$$h'(t) = \frac{20}{V'(h(t))} = \frac{20}{A(h(t))} = \frac{20}{A(10)} = \frac{20}{10\pi(2 + \sin(10\pi))} = \frac{1}{\pi} \text{ cm/s.}$$

Svar: Vattenytans höjd stiger med $\frac{1}{\pi} \text{ cm/s}$ vid den tidpunkt då vattenytan når 10 cm ovan botten.

7. Då $1 + x^2$ är skilt från noll för alla $x \in \mathbb{R}$ så är den rationella funktionen $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ väldefinierad och desutom deriverbar på hela $\mathbb{R}$ enligt sats i kursen. Även $y \mapsto \arctan(y)$ vet vi är väldefinierad och deriverbar på hela $\mathbb{R}$. Således är g både definierad och enligt kedjeregeln deriverbar på hela $\mathbb{R}$ med derivatan

$$g'(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} = \frac{2(1-x^2)}{x^4 + 6x^2 + 1},$$

där vi använde kvotregeln och att $(\arctan(y))' = \frac{1}{1+y^2}$.

(a) Då $x^4 + 6x^2 + 1 > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ ser vi att tecknet av $g'(x)$ är detsamma som tecknet av $1 - x^2$. Således finner vi att g är växande på intervallet $(-1, 1)$ och avtagande på de två intervallen $(-\infty, -1)$ och $(1, \infty)$. Eftersom g är en kontinuerlig funktion så innebär detta att g är växande på intervallet $[-1, 1]$ och avtagande på de två intervallen $(-\infty, -1]$ och $[1, \infty)$.

Svar: Funktionen g är växande på intervallet $[-1, 1]$ och avtagande på de två intervallen $(-\infty, -1]$ och $[1, \infty)$.

(b) Då g är väldefinierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ så finns det inga vertikala asymptoter.

Det återstår att undersöka möjliga sneda eller horisontella asymptoter då $x \rightarrow \infty$ och $x \rightarrow -\infty$. Men då $\arctan(y)$ är begränsad så kan vi utesluta att det existerar några sneda asymptoter, och vi behöver enbart undersöka möjliga horisontella.

När $x \rightarrow \infty$ gäller det att $\frac{2x}{1+x^2} \rightarrow 0$, och vi finner att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \arctan(0) = 0.$$

Så $y = 0$ är en asymptot till funktionsgrafen mot ∞ .

När $x \rightarrow -\infty$ gäller det att $\frac{2x}{1+x^2} \rightarrow 0$, och vi finner att även

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \arctan(0) = 0.$$

Så $y = 0$ är en asymptot till funktionsgrafen mot $-\infty$.

Svar: Funktionsgrafen $y = g(x)$ har linjen $y = 0$ som asymptot både då $x \rightarrow \infty$ och då $x \rightarrow -\infty$.

(c) Vi sammanfattar det vi funnit ovan i en tabell

	$x \rightarrow -\infty$	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$	$x \rightarrow \infty$
g'		-	0	+	0	-	
g	$\rightarrow 0$	$\searrow$	$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$\rightarrow 0$

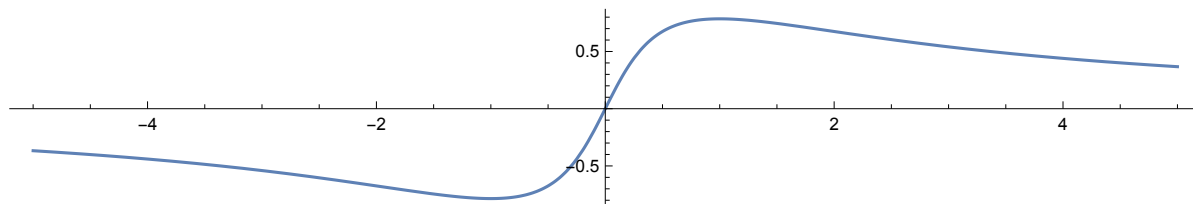
Från tabellen ser vi att g antar både ett största och minsta värde, nämligen $\frac{\pi}{4}$ respektive $-\frac{\pi}{4}$.

Svar: Funktionen g antar både ett största och minsta värde.

(d) Från (c) vet vi att $-\frac{\pi}{4} = g(-1) \leq g(x) \leq g(1) = \frac{\pi}{4}$. Då vi konstaterat att g är kontinuerlig så säger satsen om mellanliggande värden att g även antar alla värden mellan $-\frac{\pi}{4}$ och $\frac{\pi}{4}$, d.v.s. dess värdemängd är $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Svar: Funktionen g har värdemängd $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

(e) Nedan finns en figur visandes grafen av g . Här ser vi att g är avtagande på $(-\infty, 1]$, antar sitt minimum i $x = -1$, växer sedan upp till sitt maximum i $x = 1$ för att sedan avta på $[1, \infty)$. Man ser även att grafen närmar sig linjen $y = 0$ då $x \rightarrow \infty$ och $x \rightarrow -\infty$.



8. Låt t beteckna tiden i sekunder mätt från den tidpunkten som refereras till i uppgiften. Låt också $s(t)$, $v(t)$ och $a(t)$ vara funktionerna som respektive anger sträckan som bilen färdats, bilens hastighet, och bilens acceleration vid tiden t . Vi har att $s'(t) = v(t)$ (förändringshastigheten av sträckan är bilens hastighet) och $s''(t) = v'(t) = a(t)$ (förändringshastigheten av bilens hastighet ges av accelerationen).

Det vi vet från uppgiften är att $s(0) = 2000$ m, $v(0) = 10$ m/s och att för varje $t \in [0, 30]$ gäller det att $-\frac{1}{3} \leq a(t) \leq 1$.

Enligt Taylors sats så finns det för varje $t \in [0, 30]$ ett $\alpha \in [0, 30]$ sådant att

$$s(t) = s(0) + s'(0)t + \frac{s''(\alpha)}{2}t^2$$

på samma vis så finns det för varje $t \in [0, 30]$ ett $\beta \in [0, 30]$ så att

$$v(t) = v(0) + v'(\beta)t.$$

I det första fallet använde vi Taylors sats kring punkten $t = 0$ till andra ordning för funktionen $t \mapsto s(t)$ och i det andra fallet till första ordningen för funktionen $t \mapsto v(t)$.

(a) Från ovan har vi att för varje t finns det $\beta \in [0, 30]$ så att

$$v(t) = v(0) + v'(\beta)t = v(0) + a(\beta)t.$$

Då vi vet att $v(0) = 10$ och att $a(t) \leq 1$ för alla $t \in [0, 30]$ så finner vi därför att

$$v(t) \leq 10 + t = 10 + t \text{ m/s.}$$

Då $t \leq 30$ så finner vi att $v(t) \leq 40$ m/s, d.v.s. hastigheten begränsas från ovan av 40 m/s. Men om det är så att $a(t) = 1 \text{ m/s}^2$ för varje $t \in [0, 30]$ så har vi likhet i alla steg ovan vid

tidpunkten $t = 30$ s. Således utifrån den information vi fått så är detta den allra högsta hastigheten som bilen möjligtvis kan ha uppnått just 40 m/s.

Svar: Den högsta hastigheten som kan ha uppnåtts är 40 m/s.

(b) På liknande vis som i (a) så finns det enligt Taylors sats ett $\alpha \in [0, 20]$ så att

$$s(20) = s(0) + s'(0)20 + \frac{s''(\alpha)}{2}20^2 = 2000 + 10 \cdot 20 + \frac{a(\alpha)}{2}400.$$

Då vi vet att $a(\alpha) \leq 1$ m/s så finner vi att

$$s(20) \leq 2200 + 200 = 2400 \text{ m.}$$

Återigen så gäller likheten ovan om $a(t) = 1$ m/s för varje $t \in [0, 20]$ så detta är det bästa vi kan säga utifrån den givna informationen.

Svar: Den längsta totala sträckan som bilen kan ha färdats efter 20 s är 2400 m.

(c) På liknande vis som i (a) och (b) så finns det enligt Taylors sats ett $\alpha \in [0, 30]$ så att

$$s(30) = s(0) + s'(0)30 + \frac{s''(\alpha)}{2}30^2 = 2300 + \frac{a(\alpha)}{2}900.$$

Då vi vet att $a(\alpha) \geq -\frac{1}{3}$ m/s så finner vi att

$$s(30) \geq 2300 - 150 = 2150 \text{ m.}$$

Likheten gäller ovan om $a(t) = -\frac{1}{3}$ m/s för varje $t \in [0, 40]$ så detta är det bästa vi kan säga utifrån den givna informationen.

Svar: Den kortaste totala sträckan som bilen kan ha färdats efter 30 s är 2150 m.