

**Tentamen**  
**Chalmers tekniska högskola & Göteborgs universitet**  
**Matematisk analys TMV170/MMGD30**

**2022-08-23, 8.30–12.30**

**Examinator:** Simon Larson

**Telefonvakt:** Simon Larson, ankn. 6457

**Hjälpmedel:** Inga

Totalt kan man få 50 poäng.

TMV170: För betyget 3 krävs minst 20 poäng. För betyg 4 eller 5 krävs 30 resp. 40 poäng.

MMGD30: För betyget G krävs minst 20 poäng. För betyget VG krävs 36 poäng.

Skriv personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* blad.

Behandla endast en uppgift per blad (deluppgifter på samma blad är dock ok). Numrera dina blad efter att du sorterat dem. Motivera dina svar väl och förenkla dina svar så långt som möjligt. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt och renskriv dina lösningar. Använd inte röd penna.

1. Beräkna gränsvärdena

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x - \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ , och

(b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9x}{e^{-x}(x^2 - 2x - 3)}$ . (6p)

2. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_e^\infty \frac{1}{x \ln(x)^2} dx. \quad (4p)$$

3. Låt funktionen  $f: (0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definieras av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \cos(x)^2}{x} + 1 & \text{om } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin(x)^2 & \text{om } \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{4}, \\ x - \frac{5\pi}{4}, & \text{om } \frac{5\pi}{4} \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

(a) I vilka punkter är  $f$  kontinuerlig?

(b) I vilka punkter är  $f$  deriverbar? (8p)

4. Låt  $z = -1 + \sqrt{3}i$ .

(a) Skriv  $z$  på polär form.

(b) Bestäm det argumentet för  $z^{119}$  som ligger i intervallet  $(-\pi, \pi]$ .

(c) Låt  $w \in \mathbb{C}$  uppfylla att  $w^4 = z$ . Bestäm alla möjliga värden på argumentet för  $w$ . (6p)

VÄND!

5. (a) Hitta alla lösningar till differentialekvationen

$$u'(t) - 2 \cos(t)u(t) = \cos(t).$$

(b) Hitta en eller förklara varför det inte finns någon lösning sådan att  $u'(0) = u(0)$ .

(c) Hitta en eller förklara varför det inte finns någon lösning sådan att  $u'(0) = 2u(0)$ . (6p)

6. En behållare fylls på med vatten med hastigheten  $20 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Tvärsnittsarean av behållaren vid höjd  $h$  cm, mätt från behållarens botten, ges av  $A(h) = \pi h(2 + \sin(\pi h)) \text{ cm}^2$ . Hur snabbt förändras höjden av vattenytan vid det ögonblick då ytan når 10 cm ovanför behållarens botten? (6p)

7. Låt  $g$  definieras av uttrycket

$$g(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

(a) Bestäm de intervall där  $g$  är växande respektive avtagande.

(b) Finn alla asymptoter till funktionsgrafen  $y = g(x)$ .

(c) Avgör om  $g$  antar något största och minsta värde.

(d) Använd svaren i (a)-(c) för att bestämma värdemängden för  $g$ .

(e) Använd svaren i (a)-(d) för att skissa funktionsgrafen till  $g$ . (8p)

8. Vid en viss tidpunkt har en bil kört en sträcka på 2 km och färdas med hastigheten  $10 \text{ m/s}$ . Under de följande 30 sekunderna har bilen en acceleration som ligger mellan  $-\frac{1}{3} \text{ m/s}^2$  och  $1 \text{ m/s}^2$ . Använd Taylors sats för att beräkna:

(a) den högsta hastigheten som bilen möjligtvis kan ha uppnått inom det givna tidsintervallet.

(b) den längsta totala sträckan som bilen kan ha kört efter de första 20 sekunderna har passerat.

(c) den kortaste totala sträckan som bilen kan ha färdats när 30 sekunder har passerat. (6p)

Lycka till!  
Simon