

Lösungsvorschlag (tentan 2022-10-26)

$$1a, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{2 + \frac{3}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x} - 1} = \underline{\underline{-2}}$$

$$1b, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1) \cdot (\cos x + 1)}{x^2 \cdot (\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2 \cdot (\cos x + 1)} = \frac{1}{\cos x + 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} -\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos x + 1} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$1c, \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} = \left\{ \sin x = x + \mathcal{O}(x^3) \right\} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x + \mathcal{O}(x^3))}{x \cdot (x + \mathcal{O}(x^3))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(x^3)}{x^2 + \mathcal{O}(x^4)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{\mathcal{O}(x)}{1 + \mathcal{O}(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(x)}{1 + \mathcal{O}(x^2)} = \underline{\underline{0}}$$

$$3a, \begin{cases} y' = e^{x+y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Diff. eqv. är separabel!

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y} = e^x \cdot e^y \Rightarrow \int e^{-y} dy = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow -e^y = e^x + C \Leftrightarrow e^y = K - e^x \quad (\text{där } K = -C)$$

$$\Leftrightarrow y = -\ln(K - e^x) = \ln\left(\frac{1}{K - e^x}\right), \quad K \in \mathbb{R}$$

3a, (forts.)

Vi vet också att $y(0) = 0$ vilket betyder att

$$0 = \ln\left(\frac{1}{k-e^0}\right) = \ln\left(\frac{1}{k-1}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{k-1} = 1 \Leftrightarrow k=2$$

så lösningen till begynnelsevärdesproblemet ges av

$$\underline{\underline{y(x) = \ln\left(\frac{1}{2-e^x}\right)}}$$

□

3b,

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Diff.ekv. är homogen, linjär, av andra ordn. och har konstanta koefficienter. Den karakteristiska ekv. ges av

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{r^2 + 2r + 1}_{=(r+1)^2} \underbrace{-1 + 2}_{=1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (r+1)^2 = -1 \Leftrightarrow r_{1,2} = -1 \pm i.$$

Vi har av detta därför en allmän lösning på formen

$$y(x) = e^{-x} (A \cos x + B \sin x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Av begynnelsevillkoren får vi

$$y(0) = 0 \Rightarrow e^0 \cdot (A \cdot \cos(0) + B \sin(0)) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow \{y'(x) = -e^{-x} \cdot B \sin x + e^{-x} B \cos x\}$$

$$\Rightarrow -e^0 \cdot B \cdot \sin(0) + e^0 \cdot B \cdot \cos(0) = 1 \Leftrightarrow B = 1$$

3b, (forts.)

så lösningen till begynnelsevärdesprob. ges av

$$\underline{\underline{y(x) = e^{-x} \cdot \sin x}}$$

4a,

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x \geq 2 \\ k - 3x, & x < 2 \end{cases}$$

Funktionen f är kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ oavsett värdet av konstanten k . För att få kontinuitet även i $x=2$ måste gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existera, dvs.

$$2 - 2^2 = k - 3 \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{k = 2 - 4 + 6 = 4}}$$

4b,

Vill bestämma $a, b, c \in \mathbb{R}$ s.a.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + bx + cx^2)e^{-x} - 1 - ax}{x^3} = 0$$

Eftersom $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$

så gäller det för e^{-x} att

4b, (forts.)

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{2n} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

Använd utv. $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$ och sätt in i gränsvärdet!

$$\begin{aligned} \frac{(1 + bx + cx^2)e^{-x} - 1 - ax}{x^3} &= \frac{(1 + bx + cx^2)(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)) - 1 - ax}{x^3} \\ &= \frac{(1 + bx + cx^2) - (x + bx^2 + cx^3) + (\frac{x^2}{2} + \frac{b}{2}x^3 + \frac{c}{2}x^4) - (\frac{x^3}{6} + \frac{b}{6}x^4 + \frac{c}{6}x^5) + \mathcal{O}(x^4) - 1 - ax}{x^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{(bx - ax - x) + (cx^2 - bx^2 + \frac{x^2}{2}) + (-cx^3 + \frac{b}{2}x^3 - \frac{x^3}{6}) + \mathcal{O}(x^4)}{x^3} =$$

$$= \frac{1}{x^2}(b - a - 1) + \frac{1}{x}(c - b + \frac{1}{2}) + (-c + \frac{b}{2} - \frac{1}{6}) + \mathcal{O}(x)$$

Enda möjligheter för uttrycket ovan att gå mot 0

dz $x \rightarrow 0$ är om:

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad b - a - 1 &= 0 \\ \text{(ii)} \quad c - b + \frac{1}{2} &= 0 \\ \text{(iii)} \quad -c + \frac{b}{2} - \frac{1}{6} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{(i)} \quad b - a - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b - 1$$

$$\text{(ii)} \quad c - b + \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = b - \frac{1}{2}$$

4b, (forts.)

Insättning i (iii) ger:

$$-(b - \frac{1}{2}) + \frac{b}{2} - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow c = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \text{och} \quad a = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

Vi har alltså slutligen fått att

$$\underline{\underline{a = -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{3}, \quad c = \frac{1}{6}}}$$

5a,

$$\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = \{ \text{partialbröksuppdelning!} \}$$

$$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = -1$$

så $x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$ och med ansatsen

$$\frac{x+3}{x^2+3x+2} = \frac{x+3}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}$$

för man m.h.a. handpöslösning att $A = -1, B = 2$

$$= \int_0^1 \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} dx = \left[2\ln|x+1| - \ln|x+2| \right]_0^1 =$$

$$= (2\ln(2) - \ln(3)) - (2\ln(1) - \ln(2)) = 3\ln(2) - \ln(3) =$$

$$= \underline{\underline{\ln\left(\frac{8}{3}\right)}}$$

5b,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \{ \text{partiell integration} \} = x \cdot \tan x - \int \tan x dx = \\
 &= x \cdot \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = u \\ -\sin x \cdot dx = du \end{array} \right\} = x \cdot \tan x + \int \frac{1}{u} du = \\
 &= x \cdot \tan x + \ln |u| + C = \underline{\underline{x \cdot \tan x + \ln |\cos x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.}}
 \end{aligned}$$

5c,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \arcsin^2 x dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sin u \\ dx = \cos u du \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=1 \Rightarrow u=\pi/2 \end{array} \right\} = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \arcsin^2(\sin u) \cdot \cos u du = \{ \arcsin(\sin u) = u \} = \\
 &= \int_0^{\pi/2} u^2 \cdot \cos u du = \{ \text{partiell integration} \} = \\
 &= \underbrace{\left[u^2 \cdot \sin u \right]_0^{\pi/2}}_{= \pi^2/4} - \int_0^{\pi/2} 2u \cdot \sin u du = \{ \text{partiell integration} \} = \\
 &= \frac{\pi^2}{4} - \underbrace{\left[2u \cdot (-\cos u) \right]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} 2 \cdot (-\cos u) du = \\
 &= \frac{\pi^2}{4} - \left[2 \cdot \sin u \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \underline{\underline{\frac{1}{4} (\pi^2 - 8)}}
 \end{aligned}$$

6a,

Vi har att $y = 2 \ln(3x^3 + 1)$. Försök lösa ut x som funktion av y !

$$y = 2 \ln(3x^3 + 1) \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \ln(3x^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 + 1 = e^{y/2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{e^{y/2} - 1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{e^{y/2} - 1}{3} \right)^{1/3}$$

Den inversa funktionen är alltså

$$\underline{\underline{f^{-1}(x) = \left(\frac{e^{x/2} - 1}{3} \right)^{1/3}}}$$

6b,

En funktion f är injektiv om det för två olika x -värden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gäller att

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Alltså, i ord, två olika x -värden svarar alltid mot två olika y -värden. Omvänt så gäller att om $f(x_1) = f(x_2)$ så måste för en injektiv funktion $x_1 = x_2$.

6c,

Det gäller att $(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ eftersom

$$\begin{aligned}(f_2^{-1} \circ f_1^{-1}) \circ (f_1 \circ f_2) &= f_2^{-1} \circ f_1^{-1} \circ f_1 \circ f_2 = \{f_1^{-1} \circ f_1 = x\} = \\ &= f_2^{-1} \circ f_2 = \{f_2^{-1} \circ f_2 = x\} = x\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}(f_1 \circ f_2) \circ (f_2^{-1} \circ f_1^{-1}) &= f_1 \circ f_2 \circ f_2^{-1} \circ f_1^{-1} = \{f_2 \circ f_2^{-1} = x\} = \\ &= f_1 \circ f_1^{-1} = \{f_1 \circ f_1^{-1} = x\} = x.\end{aligned}$$

7a, Börja med att beräkna $f'(x)$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 \cdot (x-1)^{-1} - (x+1)(x-1)^{-2} + \frac{2}{x^2+1} = \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x^2+1} = \\ &= \frac{(x^2+1)(x-1) - (x+1)(x^2+1) + 2(x-1)^2}{(x-1)^2 \cdot (x^2+1)} = \\ &= \frac{x^3 - x^2 + x - 1 - x^3 - x - x^2 - 1 + 2x^2 - 4x + 2}{(x-1)^2 (x^2+1)} = \\ &= \frac{-4x}{(x-1)^2 (x^2+1)}\end{aligned}$$

7a, (forts.)

Gör nu ett teckenstudium av $f'(x)$ över $\mathbb{R}$.

x		0	1	
$-4x$		+	-	-
$\frac{1}{(x-1)^2}$		+	+	+
$\frac{1}{x^2+1}$		+	+	+
$f'(x)$		+	-	-

Funktionen är alltså växande på $(-\infty, 0]$, avtagande på $[0, 1) \cup (1, \infty)$ och har en kritisk punkt i $x = 0$.

7b,

Funktionen har en vertikal asymptot, nämligen linjen $x = 1$ (eftersom $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$).

Det finns dessutom två horisontella asymptoter:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} + 2 \arctan(x) \right) = 1 - \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} + 2 \arctan(x) \right) = 1 + \pi$$

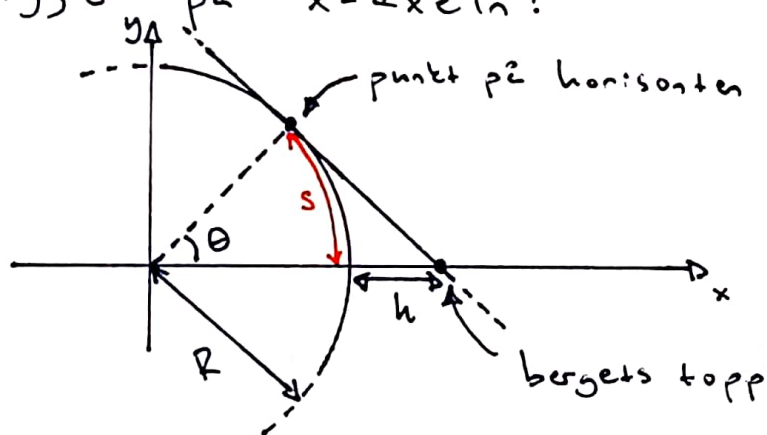
dvs. horisontell asymptot $y = 1 - \pi$ i $-\infty$ och $y = 1 + \pi$ i ∞ .

7c,

Funktionen saknar globalt minimum och maximum eftersom $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$.

8a,

Den horisont som syns från bergets topp kan beräknas som skärningspunkten för den tangent till en cirkel med radie R som dessutom passerar toppen på berget. Inför ett koordinatsyst. med origo i jordens centrum så att bergstoppen ligger på x -axeln:



Vi söker ett uttryck för sträckan s i termer av R och h . För en cirkelbåge med radie R i övre halvplanet gäller:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Vi kan därför beräkna derivatan som

8a, (forts.)

$$f'(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = - \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Beteckna den punkt som ligger på bergsbestigarens horisont som $(x_H, y_H) = (x_H, \sqrt{R^2 - x_H^2})$. Bergets topp ligger i $(R+h, 0)$. Den sökta går genom både dessa och har en lutning av $-\frac{x_H}{\sqrt{R^2 - x_H^2}}$. Alltså gäller att:

$$\frac{\sqrt{R^2 - x_H^2} - 0}{x_H - (R+h)} = - \frac{x_H}{\sqrt{R^2 - x_H^2}}$$

$$\Leftrightarrow R^2 - x_H^2 = -x_H \cdot (x_H - (R+h))$$

$$\Leftrightarrow R^2 - x_H^2 = -x_H^2 + x_H(R+h)$$

$$\Leftrightarrow x_H(R+h) = R^2$$

$$\Leftrightarrow x_H = \frac{R^2}{R+h}$$

För den införda vinkeln θ gäller således

$$\cos \theta = \frac{x_H}{R} = \frac{\frac{R^2}{R+h}}{R} = \frac{R}{R+h}$$

8a, (forts.)

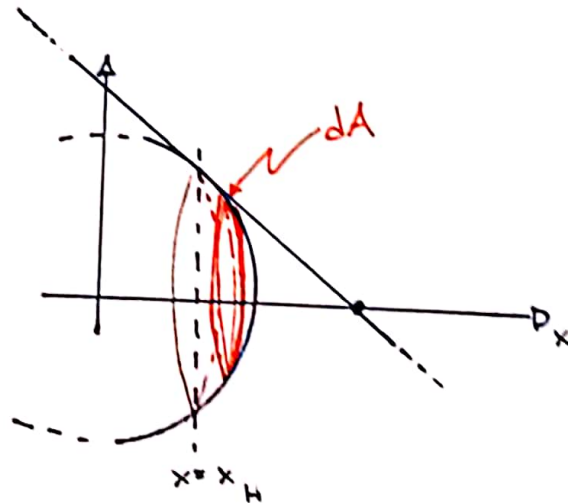
och alltså är $\theta = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)$. Det gäller
nu att sträckan s står i direkt relation
till θ genom

$$\frac{s}{2\pi R} = \frac{\theta}{2\pi}$$

vilket slutligen ger $s = R \cdot \theta = R \cdot \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)$

8b,

Ytan man ser från toppen kan beräknas som den
rotationsarea som uppstår då en cirkel med
radie R roteras runt x -axeln, från $x = x_H$
till $x = R$.



För arealelementet dA gäller att

8b, (forts.)

$$\begin{aligned} dA &= 2\pi \sqrt{R^2 - x^2} ds = 2\pi \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \\ &= 2\pi \sqrt{(R^2 - x^2) + x^2} dx = 2\pi R dx \end{aligned}$$

Den yta man ser från toppen, A_H , ges alltså av

$$\begin{aligned} A_H &= \int_{x_H}^R dA = \int_{R^2/(R+h)}^R 2\pi R dx = 2\pi R \cdot \left(R - \frac{R^2}{R+h} \right) = \\ &= 2\pi R^2 \left(1 - \frac{R}{R+h} \right) \end{aligned}$$

Jordens totala yta, A_{tot} , ges på motsv. sätt av

$$A_{tot} = \int_{-R}^R dA = 2\pi R \cdot (R - (-R)) = 4\pi R^2$$

Den andel av jordytan som man ser från toppen ges alltså av

$$\frac{A_H}{A_{tot}} = \frac{2\pi R^2 \left(1 - \frac{R}{R+h} \right)}{4\pi R^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{R+h} \right)}}$$