

Tentamen
Chalmers tekniska högskola
Matematisk analys MVE045

2022-10-26, 14.00–18.00

Examinator: Peter Helgesson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Helgesson, 0706-57 74 12

Hjälpmedel: Inga

Totalt kan man få 50 poäng.

För betyget 3 krävs minst 20 poäng. För betyg 4 eller 5 krävs 30 resp. 40 poäng.

Skriv personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* blad.

Behandla endast en uppgift per blad (deluppgifter på samma blad är dock ok). Numrera dina blad efter att du sorterat dem. Motivera dina svar väl och förenkla dina svar så långt som möjligt. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt och renskriv dina lösningar. Använd inte röd penna.

1. Beräkna följande gränsvärden:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3\sqrt{x}}{1 - x}$ (2p)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ (2p)

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ (2p)

2. Formulera och bevisa analysens huvudsats. (8p)

3. Lös följande begynnelsevärdesproblem:

(a) $y' = e^{x+y}, \quad y(0) = 0.$ (3p)

(b) $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$ (3p)

4. (a) Bestäm talet k så att funktionen f blir kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$ (2p)

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x \geq 2 \\ k - 3x, & x < 2 \end{cases}$$

(b) Bestäm talen a , b och c så att (4p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + bx + cx^2)e^{-x} - 1 - ax}{x^3} = 0$$

(Tips: Utnyttja Maclaurin-utvecklingen $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$ till lämplig grad n .)

VÄND!

5. Beräkna följande integraler:

(2p)

(a)

$$\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx$$

(2p)

(b)

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

(2p)

(c)

$$\int_0^1 \arcsin^2 x dx$$

6. (a) Bestäm den inversa funktionen till

(2p)

$$f(x) = 2 \ln(3x^3 + 1).$$

(b) Ett krav för att det ska kunna existera en invers funktion till en given funktion f är att f är *injektiv* på sin definitionsmängd $\mathcal{D}_f$. Vad innebär det för en funktion att vara injektiv?

(2p)

(c) Antag att f_1 och f_2 är två inverterbara funktioner med inverser f_1^{-1} och f_2^{-1} . Visa med hjälp av detta att kompositionen $f_1 \circ f_2$ också är inverterbar och att dess invers $(f_1 \circ f_2)^{-1}$ kan skrivas som $(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$.

(2p)

7. Låt f definieras av uttrycket

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} + 2 \arctan x.$$

(a) Bestäm de intervall där f är växande respektive avtagande och hitta alla kritiska punkter.

(2p)

(b) Finn och karaktärisera alla asymptoter till funktionsgrafen av f .

(3p)

(c) Avgör om f antar något globalt största och minsta värde.

(1p)

8. En äventyrare har efter mycket möda och ve lyckats bestiga toppen av ett högt berg. Vi ska nu avsluta med lite bergsgeometri! Hur mycket ser man från toppen egentligen? För enkelhets skull tänker vi oss jorden som en helt slät sfär med radie R . Den topp som äventyraren har bestigit är belägen på en höjd h ovanför jordens yta.

(a) Hur lång är den sträcka på jorden som äventyraren teoretiskt sett kommer att kunna se uppifrån berget? Dvs. hur lång är den cirkelbåge som sträcker sig från bergets fot till den horisont som syns från toppen? Uttryck svaret i termer av R och h .

(3p)

(b) Hur stor andel av jordens totala yta kan man se från toppen? Uttryck svaret i termer av R och h .

(3p)

Trivia: Från Kebnekaises nordtopp kan man (teoretiskt) se en yta motsvarande ca. 15% av Sveriges yta och ungefär 9% av hela Sverige (!).