

$$1a, \quad \frac{(2x-1)(x+3)}{x+5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-\frac{1}{2})(x+3)}{x+5} \geq 0$$

En teckenstudium ger således

	-5	0	-3	1/2	
$x - \frac{1}{2}$	-	-	-	-	+
$x + 3$	-	-	0	+	+
$x + 5$	-	0	+	+	+
	-	?	+	0	+

och olikheten gäller alltså för alla x s.d.

$$\underline{\underline{x \in (-5, -3] \cup [\frac{1}{2}, \infty)}}$$

1b,

$$\begin{array}{r} x-1 \\ \hline x^4 + x^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 + x^2 + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x \cdot (x^3 + x^2 + 1) \\ \hline -x^3 + x^2 - x \\ -(-1) \cdot (x^3 + x^2 + 1) \\ \hline 2x^2 - x + 1 \end{array}$$

Vi kan alltså skriva

$$\frac{x^4 + x^2}{x^3 + x^2 + 1} = x - 1 + \frac{2x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 + 1}$$

1c, Det gäller att

$$|x^2 - 6x + 5| = \begin{cases} x^2 - 6x + 5, & x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ -(x^2 - 6x + 5), & x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$$

Hitta alla nollställen till $x^2 - 6x + 5$ och red därefter ut frågan om tecken.

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm 2$$

$$\text{och alltså är } x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1).$$

En teckenstudium ger:

		1	0	5	
		-	-	-	+
$x - 5$		-	-	-	+
$x - 1$		-	0	+	+
$x^2 - 6x + 5$		+	0	-	+

Vi måste därmed studera två olika fall.

$$(i) \quad x^2 - 6x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$$

$$|x^2 - 6x + 5| = 9 - 3x \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 9 - 3x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{8}{2} = 4, \quad x_2 = -\frac{2}{2} = -1$$

③

Men endast $x_2 = -1$ ligger i $(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$

så vi hittar en lösning i fall (i).

$$(ii) \quad x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 5)$$

$$|x^2 - 6x + 5| = 9 - 3x \Leftrightarrow -(x^2 - 6x + 5) = 9 - 3x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{9}{2}x + \frac{81}{4} - \frac{81}{4} + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{14}{2} = 7, \quad x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

Endast $x_2 = 2$ ligger i intervallet $(1, 5)$

och vi hittar en lösning i fall (ii).

Ekvationen $|x^2 - 6x + 5| = 9 - 3x$ har två

lösningar, nämligen $x_1 = -1$ och $x_2 = 2$.

$$3a, \quad f(x) = x \cdot \ln|x| - x$$

Använd produkt- och kedjeregeln och att derivatan av funktionen $|x|$ är $\text{sgn}(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \ln|x| + x \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \text{sgn}(x) - 1 = \\ &= \left\{ \frac{\text{sgn}(x)}{|x|} = \frac{1}{x} \right\} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln|x| - 1 = \ln|x| \end{aligned}$$

$$\text{så } \underline{\underline{f'(x) = \ln|x|}}.$$

3b, Vet att $f(-x) = -f(x)$ och vill visa att $f'(-x) = f'(x)$. Derivatans definition ger

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-(x-h)) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \\ &= f'(x) \quad \text{och resultatet är bevisat.} \end{aligned}$$

3c, Det gäller per definition av ReLU att

$$\text{ReLU}(w_0 + w_1 \cdot x) = \begin{cases} w_0 + w_1 \cdot x, & w_0 + w_1 \cdot x \geq 0 \\ 0, & w_0 + w_1 \cdot x < 0 \end{cases}$$

Ur detta får man således att

$$\underline{\underline{\frac{d}{dx} \text{ReLU}(w_0 + w_1 \cdot x) = \begin{cases} w_1, & w_0 + w_1 \cdot x \geq 0 \\ 0, & w_0 + w_1 \cdot x < 0 \end{cases}}}$$

4a, Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}r + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(r - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow r_1 = 2, r_2 = 1$$

Med två distinkta och reella rötter får vi alltså lösningen

$$\underline{\underline{y(x) = A \cdot e^{2x} + B \cdot e^x, \quad A, B \in \mathbb{R}}}$$

4b, Om vi deriverar både vänster- och högerled får vi

$$\frac{d}{dx} \left[y(x) + \int_x^1 \frac{2ty(t)}{1+t^2} dt \right] = \frac{d}{dx} [2x + 2]$$

$$\Rightarrow y' + \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{2ty(t)}{1+t^2} dt = 2$$

$$\Leftrightarrow y' - \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{2ty(t)}{1+t^2} dt = 2$$

$$\Leftrightarrow y' - \frac{2x}{1+x^2} \cdot y = 2.$$

Notera att detta är en första ordn. linjär differentialekv. och vi kan anv. metoden med integrerande faktorn. I detta fall är

$$p(x) = -\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \int p(x) dx = -\ln|1+x^2|$$

$$\text{och } e^{-\ln|1+x^2|} = e^{\ln(1/(1+x^2))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Vi får nu att

$$\frac{1}{1+x^2} \cdot y' - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot y = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{y}{1+x^2} \right] = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1+x^2} = \int \frac{2}{1+x^2} dx = 2 \cdot \arctan(x) + C$$

$$\Rightarrow y(x) = 2(1+x^2) \arctan(x) + C \cdot (1+x^2)$$

Om vi sätter in $x=1$ i integralekvationen

$$\text{får man } y(1) + 0 = 2 \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow y(1) = 4$$

Med detta kan vi bestämma konstanten C !

Insättning av $x=1$ ger

$$\begin{aligned} y(1) &= 2 \cdot (1+1^2) \cdot \arctan(1) + C \cdot (1+1^2) \\ &= 4 \arctan(1) + 2C = 4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{4 - 4 \arctan(1)}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

och vi får alltså den slutgiltiga lösningen som

$$\underline{\underline{y(x) = 2(1+x^2) \left(\arctan(x) + 1 - \frac{\pi}{4} \right)}}$$

5a, Linjäriseringen $L(x)$ till en deriverbar funktion $f(x)$ kring punkten $x=a$ ges av

$$L(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$$

I vårt fall är $f(x) = \ln(x)$ och $a=1$.

Det gäller att $f(1) = \ln(1) = 0$ och

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{så}$$

$$L(x) = 0 + 1 \cdot (x-1)$$

Alltså är $\ln(1,2) \approx L(1,2) = 1,2 - 1 = \underline{\underline{0,2}}$

5b, Maclaurin-utv. av $f(x)$ av andra ordningen
ges av $f(0) + f'(0) \cdot (x-0) + \frac{f''(0)}{2} (x-0)^2$.

Vi har $f(x) = \cos(\sin x)$ så

$$f(0) = \cos(\sin 0) = \cos(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow f'(0) = -\sin(\sin 0) \cdot \cos 0 = 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\cos(\sin x) \cdot \cos x \cdot \cos x - \sin(\sin x) \cdot (-\sin x) \\ &= \sin(\sin x) \cdot \sin x - \cos(\sin x) \cdot \cos^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(0) &= \sin(\sin 0) \cdot \sin 0 - \cos(\sin 0) \cdot \cos^2 0 \\ &= 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

Andra ordningens Maclaurin-utv ges därför av

$$\underline{\underline{1 - \frac{1}{2} x^2}}}$$

$$\begin{aligned} 5c, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{2x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5))}{2x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{12} + \mathcal{O}(x^2) = \underline{\underline{\frac{1}{12}}} \end{aligned}$$

(9)

$$6a, \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx =$$

$$= \left\{ u = e^x \mid \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow u=1 \\ du = e^x dx \mid x=\infty \Rightarrow u=\infty \end{array} \right\} = \int_1^{\infty} \frac{1}{u^2 + 1} du =$$

$$= \left[\arctan(u) \right]_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

6b, Integralen $\int_0^{\infty} \sin x dx$ är divergent.

Om vi skriver

$$\int_0^{\infty} \sin x dx = \underbrace{\int_0^{\pi} \sin x dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx}_{I_2} + \underbrace{\int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx}_{I_3} + \dots$$

så skulle t.ex.

$$\int_0^{\infty} \sin x dx = \underbrace{(I_1 + I_2)}_{=0} + \underbrace{(I_3 + I_4)}_{=0} + \dots = 0$$

men även

$$\int_0^{\infty} \sin x dx = I_1 + \underbrace{(I_2 + I_3)}_{=0} + \underbrace{(I_4 + I_5)}_{=0} + \dots =$$

$$= I_1 = \int_0^{\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} =$$

$$= -(-1) - (-1) = 2$$

och $0 \neq 2$.

$$6c, \int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = \{ \text{partiell integration} \} =$$

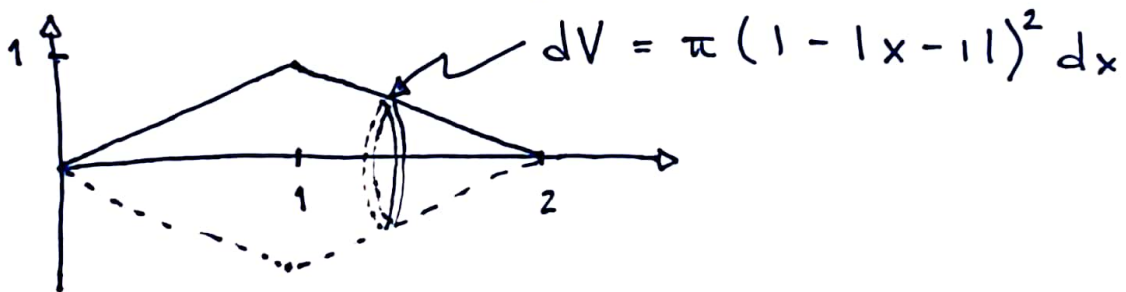
$$= \left[-\frac{\ln(x+1)}{x} \right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1) \cdot x} dx =$$

$$= \left\{ \frac{1}{(x+1) \cdot x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} \Rightarrow A = -1, B = 1 \right\} =$$

$$= \ln(2) + \int_1^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx = \ln(2) + \left[\ln|x| - \ln|x+1| \right]_1^{\infty}$$

$$= \ln(2) + \left[\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \right]_1^{\infty} = \ln(2) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{2\ln(2)}}.$$

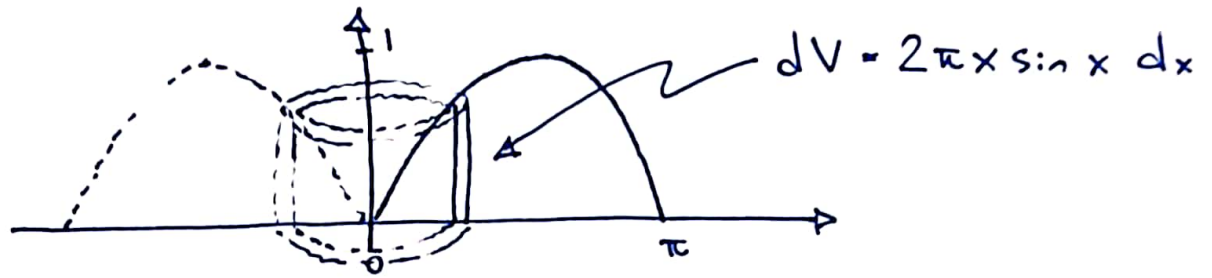
7a, Skizze Rotationsvolumen!



$$V = \int_0^2 \pi (1 - |x - 1|)^2 dx = 2 \int_0^1 \pi (1 - (-(x-1)))^2 dx$$

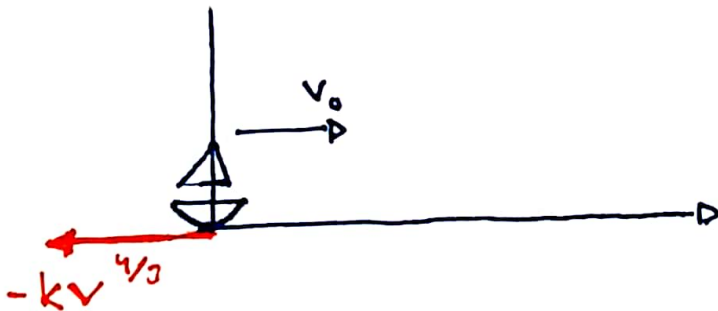
$$= 2 \int_0^1 \pi x^2 dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}} \text{ v.e.}$$

7b, Skissa rotationsvolymen!



$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{\pi} 2\pi x \cdot \sin x \, dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \{\text{part. int.}\} = \\
 &= 2\pi \left(\left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx \right) = \\
 &= 2\pi \left(\pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi} \right) = \underline{\underline{2\pi^2}} \text{ v.e.}
 \end{aligned}$$

8a, Vi har följande situation



Kraften på botten från vattnet är motriktad båtens färdriktning. Det är den enda kraft som påverkar botten i horisontalriktning. Vi får därför differentialekv.

$$\underline{\underline{-kv^{4/3} = m \cdot \frac{dv}{dt}}}$$

8b, Diff.ekv. i a, är separabel!

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -k v^{4/3} \Rightarrow \int v^{-4/3} dv = - \int \frac{k}{m} dt$$

$$\Rightarrow -3 v^{-1/3} = -\frac{k}{m} t - C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v^{-1/3} = \frac{k}{3m} t + K, \quad K = \frac{C}{3}$$

$$\Rightarrow v^{1/3} = \frac{1}{\frac{k}{3m} t + K} \Rightarrow v = \frac{1}{\left(\frac{k}{3m} t + K\right)^3}$$

Vi vet dessutom att $v(0) = v_0$, dvs.

$$v_0 = \frac{1}{\left(\frac{k}{3m} \cdot 0 + K\right)^3} \Leftrightarrow K = v_0^{-1/3}$$

och vi får lösningen som

$$v(t) = \frac{1}{\left(\frac{k}{3m} t + v_0^{-1/3}\right)^3}$$

8c, Den totala sträcka som båten kommer att glida från det att seglen revs ges av integralen $\int_0^\infty v(t) dt$. Denna kan beräknas som:

$$\int_0^{\infty} v(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k}{3m}t + v_0^{-1/3}\right)^3} dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{k}{3m}t + v_0^{-1/3} = u \quad ; \quad t=0 \Rightarrow u = v_0^{-1/3} \\ dt = \frac{3m}{k} du \quad ; \quad t=\infty \Rightarrow u = \infty \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{3m}{k} \int_{v_0^{-1/3}}^{\infty} \frac{1}{u^3} du = \frac{3m}{k} \left[-\frac{1}{2} u^{-2} \right]_{v_0^{-1/3}}^{\infty} =$$

$$= \frac{3m}{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v_0^{-2/3}} = \underline{\underline{\frac{3m}{2k} \cdot v_0^{2/3}}}$$