

Tentamen
Chalmers tekniska högskola
Matematisk analys MVE045

2023-01-03, 14.00–18.00

Examinator: Peter Helgesson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Helgesson, 0706-57 74 12

Hjälpmedel: Inga

Totalt kan man få 50 poäng.

För betyget 3 krävs minst 20 poäng. För betyg 4 eller 5 krävs 30 resp. 40 poäng.

Skriv personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* blad.

Behandla endast en uppgift per blad (deluppgifter på samma blad är dock ok). Numrera dina blad efter att du sorterat dem. Motivera dina svar väl och förenkla dina svar så långt som möjligt. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt och renskriv dina lösningar. Använd inte röd penna.

1. (a) För vilka x gäller olikheten $\frac{(2x-1)(x+3)}{x+5} \geq 0$? (2p)

(b) Uttryck $\frac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1}$ som summan av ett polynom och en rationell funktion genom att använda polynomdivision. (2p)

(c) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $|x^2 - 6x + 5| = 9 - 3x$ (2p)

2. Formulera och bevisa analysens huvudsats. (8p)

3. (a) Derivera funktionen $f(x) = x \ln|x| - x$. (2p)

(b) Bevisa med hjälp av derivatans definition att derivatan av en udda funktion alltid är en jämn funktion, dvs. om $f(-x) = -f(x)$ så är $f'(-x) = f'(x)$. (2p)

(c) Inom deep learning används ofta funktionen "ReLU" (rectified linear unit) som en så kallad *aktiveringsfunktion*. Denna definieras som

$$\text{ReLU}(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Bestäm derivatan av $\text{ReLU}(w_0 + w_1 x)$ där w_0 och w_1 är reella konstanter. (2p)

4. (a) Lös differentialekvationen $y'' - 3y' + 2y = 0$ (2p)

(b) Lös integralekvationen

$$y(x) + \int_x^1 \frac{2ty(t)}{1+t^2} dt = 2x + 2$$

(4p)

VÄND!

5. (a) Beräkna ett approximativt värde av $\ln(1.2)$ genom linjärisering i punkten $x = 1$. (2p)

(b) Beräkna de tre första termerna i Maclaurin-utvecklingen av funktionen $f(x) = \cos(\sin x)$. (2p)

(c) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{2x^3}$$
(2p)

6. För var och en av de generaliserade integralerna nedan; beräkna om möjligt dess värde eller visa att den divergerar.

(a)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$
(2p)

(b)

$$\int_0^{\infty} \sin x \, dx$$
(2p)

(c)

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$$
(2p)

7. (a) Beräkna volymen av kropp som uppstår då grafen till funktionen $f(x) = 1 - |x - 1|$, $0 \leq x \leq 2$, roteras runt x -axeln. (3p)

(b) Beräkna volymen av kropp som uppstår då grafen till funktionen $f(x) = \sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$, roteras runt y -axeln. (3p)

8. En snedseglare står i begrepp att gubba in mot hamn när han till sin stora förfäran upptäcker att båtens backslag har havererat. Nu är goda råd dyra! Som tur är står det i båtens instruktionsbok att den **motståndskraft** som vattnet utövar på båten är ungefär $kv^{4/3}$, där v betecknar båtens hastighet och k är en båtspecifik konstant. Seglaren känner också till Newtons andra lag som säger att $F = m \frac{dv}{dt}$, där F är summan av de krafter som verkar på båten och m är båtens massa. Om seglaren bara håller huvudet kallt och räknar lite så kommer han nog kunna reva seglen i exakt rätt läge så att båten fint glider in i hamn och precis stannar vid bryggan utan att krascha.

(a) Formulera den differentialekvation som beskriver båtens hastighet $v(t)$ efter det att seglen har revats. (2p)

(b) Lös differentialekvationen i (a) givet begynnelsevillkoret $v(0) = v_0$. (2p)

(c) Beräkna hur långt båten glider från det att seglen har revats? (2p)