

LÖSNINGSFÖRSLAG TENTA 2024-05-31

1.(a) Vi använder oss av variabelbytet $1 + x^2 = u$

$$\begin{aligned}\int x \ln(1 + x^2) dx &= \left\{ \begin{array}{l} 1 + x^2 = u \\ 2x dx = du \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{\ln(u)}{2} du \\ &= \frac{u \ln(u) - u}{2} + C \\ &= \frac{(1 + x^2) \ln(1 + x^2) - (1 + x^2)}{2} + C \\ &= \frac{1 + x^2}{2} (\ln(1 + x^2) - 1) + C.\end{aligned}$$

Vi observerar att integralen kan beräknas på flera andra vis, bland annat med hjälp av partiell integration.

Svar: $\int x \ln(1 + x^2) dx = \frac{1 + x^2}{2} (\ln(1 + x^2) - 1) + C.$

(b) Vi använder oss av partialbråksuppdelning.

Vi noterar att polynomet i täljaren har lägre grad än polynomet i nämnaren så vi behöver inte först utföra polynomdivision. För att hitta partialbråksuppdelningen så behöver vi först finna alla nollställen till polynomet i nämnaren, $x^2 - x - 6$. Vi finner med hjälp av kvadratkomplettering att

$$x^2 - x - 6 = 0 \iff x = 3 \text{ eller } x = -2.$$

Vi har således att det existerar konstanter A, B sådana att

$$\frac{x}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2} \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}.$$

Vi förlänger båda sidor med $x^2 - x - 6$ och får med hjälp av kontinuitet av höger- och vänsterledet att

$$x = A(x + 2) + B(x - 3) \quad \text{för all } x \in \mathbb{R}.$$

Vi finner A, B genom att undersöka ekvationen för $x = 3$ och $x = -2$. För $x = 3$ har vi att

$$3 = 5A \iff A = \frac{3}{5}.$$

För $x = -2$ har vi att

$$-2 = -5B \iff B = \frac{2}{5}.$$

Vi har alltså funnit att

$$\frac{x}{x^2 - x - 6} = \frac{3}{5(x-3)} + \frac{2}{5(x+2)} \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}.$$

Om vi återgår till den sökta integralen har vi därför att

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x - 6} dx &= \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{5} \frac{1}{x-3} + \frac{2}{5} \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \left[\frac{3}{5} \ln|x-3| + \frac{2}{5} \ln|x+2| \right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{3}{5} \ln(2) + \frac{2}{5} \ln(3) - \frac{3}{5} \ln(4) - \frac{2}{5} \ln(1) \\ &= \frac{1}{5} \ln(8) + \frac{1}{5} \ln(9) - \frac{1}{5} \ln(64) \\ &= \frac{1}{5} \ln\left(\frac{9}{8}\right). \end{aligned}$$

Svar: $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x - 6} dx = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{9}{8}\right).$

(c) Integralen i fråga är generaliserad då $x \mapsto \frac{1}{x-\pi}$ ej är begränsad då x närmar sig π . Enligt definitionen av generaliserade integraler så är integralen konvergent om och endast om gränsvärdet

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\pi-\delta} \frac{1}{x-\pi} dx$$

existerar. För varje $\epsilon > 0$ kan vi beräkna integralen i gränsvärdet,

$$\int_0^{\pi-\epsilon} \frac{1}{x-\pi} dx = [\ln|x-\pi|]_0^{\pi-\epsilon} = \ln(\epsilon) - \ln(\pi).$$

Vi finner således att

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\pi-\delta} \frac{1}{x-\pi} dx = \infty$$

och konstaterar att den generaliserade integralen i fråga är divergent.

Svar: Den generaliserade integralen $\int_0^\pi \frac{1}{x-\pi} dx$ är divergent.

2.(a) Eftersom $1 + u(t)^2 > 0$ så är ekvationen i frågan ekvivalent med den separerade ekvationen

$$\frac{u'(t)}{1 + u(t)^2} = \cos(t).$$

Vänsterledet känns igen som derivatan av $t \mapsto \arctan(u(t))$ så genom att ta primitiva funktioner av båda sidor av denna ekvation finner vi att om u löser ODEn så är

$$\arctan(u(t)) = \sin(t) + C$$

för någon konstant $C \in \mathbb{R}$. Genom att använda villkoret $u(0) = 0$ så finner vi att för den sökta lösningen har vi

$$\arctan(0) = \sin(0) + C \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Så den sökta lösningen uppfyller att $\arctan(u(t)) = \sin(t)$ och genom att ta tangens av höger- och vänsterledet kommer vi fram till att

$$u(t) = \tan(\sin(t)).$$

Svar: $u(t) = \tan(\sin(t))$.

(b) Differentialekvationen i frågan är en inhomogen linjär ekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Enligt en sats i kursen kan vi hitta alla lösningar till denna ekvationen genom att hitta en lösning till ekvationen och finna alla lösningar till den homogena ekvation $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Vi börjar med att hitta alla lösningar till $y'' + 2y' + 2y = 0$. Detta görs via att lösa den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = -1 - i \text{ eller } r = -1 + i.$$

Enligt en sats vi visat i kursen ges således alla lösningar till den homogena ekvationen på formen

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x) \quad \text{för konstanter } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Vi söker nu en partikulärlösning till ekvationen i frågan. Då högerledet ges av en linjärkombination av e^x och e^{-x} söker vi en lösning på formen $x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$ för konstanter $A, B \in \mathbb{R}$. Insättning i vänsterledet av ekvationen ger

$$\begin{aligned} (Ae^x + Be^{-x})'' + 2(Ae^x + Be^{-x})' + 2(Ae^x + Be^{-x}) &= Ae^x + Be^{-x} + 2(Ae^x - Be^{-x}) + 2(Ae^x + Be^{-x}) \\ &= 5Ae^x + Be^{-x}. \end{aligned}$$

Vi finner således att $x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$ löser vår ekvation om vi väljer $A = \frac{1}{10}$ och $B = \frac{1}{2}$. Det vill säga vi har funnit att en lösning till ekvationen ges av

$$y_p(x) = \frac{e^x}{10} + \frac{e^{-x}}{2}.$$

Enligt en sats i kursen kan samtliga lösningar då skrivas som summan av denna partikulärlösning och en lösning till motsvarande homogena ekvation. Vi har alltså funnit att alla lösningar ges av

$$y(x) = \frac{e^x}{10} + \frac{e^{-x}}{2} + C_1 e^{-x} \sin(x) + C_2 e^{-x} \cos(x) \quad \text{för konstanter } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Svar: Alla lösningar till ODEn ges av $y(x) = \frac{e^x}{10} + \frac{e^{-x}}{2} + C_1 e^{-x} \sin(x) + C_2 e^{-x} \cos(x)$ för konstanter $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3. Se anteckningar föreläsning 15.

4. (a) För att ta fram Taylorpolynomet till f kring 0 av ordning fyra behöver vi beräkna de första fyra derivatorna av f . Vi har att

$$f'(x) = 4x - 2 \sin(2x), \quad f''(x) = 4 - 4 \cos(2x), \quad f'''(x) = 8 \sin(2x), \quad f''''(x) = 16 \cos(2x).$$

Vi noterar att

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad f''''(0) = 16.$$

Enligt definitionen är Taylorpolynomet till f av grad 4 kring 0 således

$$\begin{aligned} P(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 \\ &= 1 + \frac{2}{3}x^4. \end{aligned}$$

Svar: Taylorpolynomet till f av ordning 4 kring 0 är $P(x) = 1 + \frac{2}{3}x^4$.

(b) Enligt Taylors sats och svaret på (a) gäller det att

$$f(x) = 1 + \frac{2}{3}x^4 + \mathcal{O}(x^5) \quad \text{då } x \rightarrow 0.$$

Således har vi att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + \mathcal{O}(x^5)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} + \mathcal{O}(x) \right) = \frac{2}{3}.$$

Svar: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^4} = \frac{2}{3}.$

(c) En funktion $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i en punkt $a \in D_g$ om och endast om det gäller att

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Då h i uppgiften är kontinuerlig för alla $x \neq 0$ då den på intervallen $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$ ges av kombinationer av elementära funktioner som vi har visat är kontinuerliga under kursen. Således behöver vi bara undersöka kontinuitet i 0. Vi beräknar höger- och vänstergränsvärde för $h(0)$ då $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} k = k = h(0),$$

och, enligt vårt svar på (b),

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x^4} = \frac{2}{3}.$$

Vi finner således att h är kontinuerlig om och endast om $k = h(0) = \frac{2}{3}$.

Svar: Funktionen h är kontinuerlig om och endast om $k = \frac{2}{3}$.

5. (a) Funktionen f är summan av den rationella funktionen $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$ vars naturliga definitionsmängd är $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ och den elementära funktionen $x \mapsto \ln(x)$ vars definitionsmängd är $(0, \infty)$. Således är den naturliga definitionsmängden för f skärningen av dessa två mängder, det vill säga

$$D_f = (\mathbb{R} \setminus \{3\}) \cap (0, \infty) = (0, 3) \cup (3, \infty).$$

Svar: Funktionens definitionsmängd är $(0, 3) \cup (3, \infty)$.

(b) Då de elementära funktionerna $x \mapsto \frac{x+1}{x-3}$ och $x \mapsto \ln(x)$ är kontinuerliga och godtyckligt många gånger deriverbara på sina respektive definitionsmängder, så är f som summan av dessa funktioner också kontinuerlig och godtyckligt många gånger deriverbar på hela sin definitionsmängd.

Eftersom f är kontinuerlig på $(0, 3) \cup (3, \infty)$ är de enda möjliga vertikala asymptoterna $x = 0$ och $x = 3$. För att avgöra om dessa faktiskt utgör vertikala asymptoter behöver vi undersöka gränsvärdena då $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 3^+$, och $x \rightarrow 3^-$. Vi finner att

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x-3} + \ln(x) \right) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x+1}{x-3} + \ln(x) \right) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x+1}{x-3} + \ln(x) \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Vi har funnit att grafen till f har två vertikala asymptoter, nämligen $x = 0$ och $x = 3$.

Då $D_f = (0, 3) \cup (3, \infty)$ så återstår det att undersöka möjliga sneda eller horisontella asymptoter då $x \rightarrow \infty$. Vi har visat i kursen att om $y = kx + m$ är en sned (eller horisontell asymptot) för grafen till f då $x \rightarrow \infty$ så gäller det att

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ och } m = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

I vårt fall har vi att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+1}{x-3} + \ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 1/x}{x-3} + \frac{\ln(x)}{x} \right) = 0,$$

där vi använde standardgränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, så om en sned asymptot existerar så är $k = 0$ (d.v.s. det är i så fall en horisontell asymptot). Vi försöker beräkna gränsvärdet som ger m men finner att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} + \ln(x) \right) = \infty,$$

vilket innebär att grafen till f inte har någon sned eller horisontell asymptot då $x \rightarrow \infty$.

Svar: Grafen till f har två vertikala asymptoter, nämligen $x = 0$ och $x = 3$, men saknar sneda eller horisontella asymptoter.

(c) Som argumenterats ovan så är f kontinuerlig och godtyckligt många gånger deriverbar på hela sin definitionsmängd. Således kan vi bestämma de intervall där f är växande respektive avtagande genom att studera f' . Vi beräknar derivatan av f :

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-3} + \ln(x) \right)' = \frac{(x-3) - (x+1)}{(x-3)^2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 10x + 9}{x(x-3)^2} \quad \text{för } x \in (0, 3) \cup (3, \infty).$$

Då nämnaren $x(x-3)^2$ är positiv för varje $x \in (0, 3) \cup (3, \infty)$ avgörs tecknet av f' av uttrycket i täljaren, $x^2 - 10x + 9$. Således kan teckenväxlingar av derivatan av f enbart ske i nollställena till polynomet $x^2 - 10x + 9$. Vi finner dessa nollställena via kvadratkomplettering:

$$x^2 - 10x + 9 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1 \text{ eller } x = 9.$$

Genom att beräkna värdet av f' i en punkt i varje av intervallen $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 9)$ och $(9, \infty)$ hittar vi teckentabellen:

	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x < 9$	$x = 9$	$x > 9$
f'	+	0	-	ej def.	-	0	+
f	$\nearrow$	-1	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	$\frac{5}{3} + \ln(9)$	$\nearrow$

Vi har således visat att f är växande på de två intervallen $(0, 1)$ och $(9, \infty)$ samt avtagande på de två intervallen $(1, 3)$ och $(3, 9)$. Då vi argumenterat ovan att f är kontinuerlig i $x = 1$ och $x = 9$ samt att f har vertikala asymptoter $x = 0$ och $x = 3$ så gäller det att f är

växande på de två intervallen $(0, 1]$ och $[9, \infty)$ samt avtagande på de två intervallen $[1, 3)$ och $(3, 9]$.

Svar: f är växande på de två intervallen $(0, 1]$ och $[9, \infty)$ och avtagande på de två intervallen $[1, 3)$ och $(3, 9]$.

(d) Enligt teckentabellen i (c) så har f kritiska punkter i $x = 1$ och $x = 9$. Punkten $x = 1$ är ett lokalt maximum där funktionsvärdet är -1 , och $x = 9$ ett lokalminimum där funktionsvärdet är $\frac{5}{3} + \ln(9)$. Då definitionsmängden till f är öppen och f är deriverbar på hela sin definitionsmängd så är detta de enda lokala extrempunkterna som existerar.

Då vi visat i (b) att

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

så drar vi slutsatsen att vi saknar både globalt maximum och globalt minimum då f inte varken är uppåt eller nedåt begränsad.

Svar: f saknar både globalt maximum och globalt minimum. Dock har f ett lokalt maximum i $x = 1$ där funktionens värde är -1 och även ett lokalt minimum i $x = 9$ där funktionens värde är $\frac{5}{3} + \ln(9)$.

(e) Enligt vad vi visat i (a)-(d) samt observationen att $\frac{5}{3} + \ln(9) > -1$ så har f värdemängd $(-\infty, -1] \cup [\frac{5}{3} + \ln(9), \infty)$.

Svar: $V_f = (-\infty, -1] \cup [\frac{5}{3} + \ln(9), \infty)$.

(f) **Svar:** I figuren nedan visas grafen till f . Vi noterar de egenskaper som diskuterats ovan

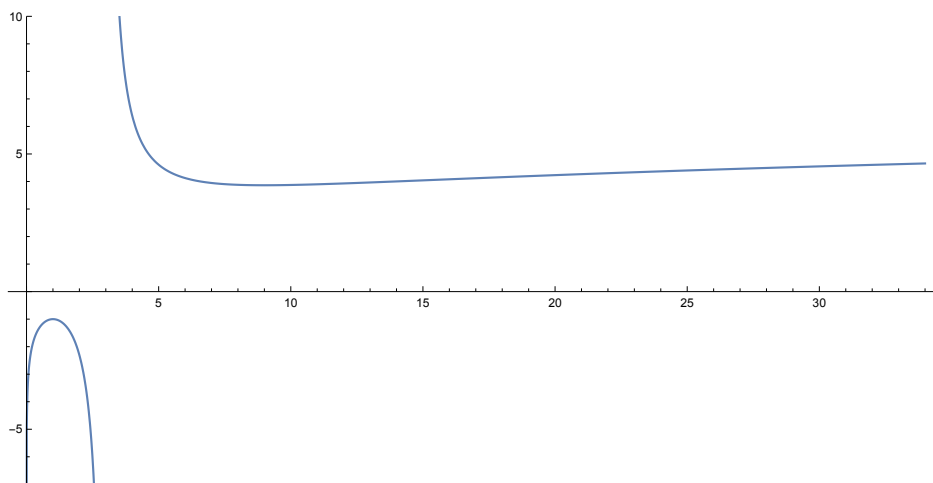
- f är definierad på $(0, 3) \cup (3, \infty)$ med vertikala asymptoter $x = 0$ och $x = 3$,
- f är växande på $(0, 1]$ och $[9, \infty)$ och avtagande på $[1, 3)$ och $(3, 9]$,
- f har lokalt maximum i $x = 1$ där värdet är -1 och ett lokalt minimum i $x = 9$ där funktionens värde ges av $\frac{5}{3} + \ln(9)$,
- vi har de oegentliga gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

- och då

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

växer f mot ∞ då $x \rightarrow \infty$ väldigt sakta (saktare än varje linjär funktion).



6. (a) Vi beräknar först absolutbeloppet av z :

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Vi söker sedan argumentet θ så att

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = 2\sqrt{3}(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Eftersom $z = 3 - i\sqrt{3}$ leder detta till att θ ska lösa de trigonometriska ekvationerna

$$\begin{cases} \cos(\theta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

som har lösningarna $\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ för $k \in \mathbb{Z}$.

Vi kan således skriva z på polär form som

$$z = 2\sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) \quad \text{eller} \quad z = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Svar: $z = 2\sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$ eller $z = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

(b) Om $w \in \mathbb{C}$ uppfyller att $|w| = 1$ så kan w skrivas på polär form som antingen $w = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ eller $w = e^{i\phi}$ för ett unikt $\phi \in [0, 2\pi)$. Genom att skriva z och w på polär form så kan kvoten $\frac{z}{w}$ skrivas som

$$\frac{z}{w} = \frac{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\phi}} = 2\sqrt{3}e^{i(-\frac{\pi}{6}-\phi)}.$$

Kvoten har realdel noll om och endast om dess argument $-\frac{\pi}{6} - \phi$ tillhör $\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Vi har därför att $\frac{z}{w}$ har realdel noll om det för $k \in \mathbb{Z}$ gäller att

$$-\frac{\pi}{6} - \phi = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

vilket är ekvivalent med att

$$\phi = -\frac{2\pi}{3} - k\pi.$$

Det finns två $k \in \mathbb{Z}$ sådant att $\phi = -\frac{2\pi}{3} - k\pi \in [0, 2\pi)$ nämligen $k = -1$ som leder till $\phi = \frac{\pi}{3}$ och $k = -2$ som ger $\phi = \frac{4\pi}{3}$.

Således är de två sökta komplexa talen $w_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ och $w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Svar: De två sökta komplexa talen är $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ och $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Linjäriseringen av g kring $x = 0$ ges av funktionen $L(x) = g(0) + g'(0)x$. Vi behöver således använda ekvationen som g uppfyller för att ta reda på $g(0)$ samt $g'(0)$.

Genom att sätta $x = 0$ i ekvationen finner vi att $g(0)$ uppfyller ekvationen

$$0 \cdot \cos(0 \cdot g(0)) + g(0) = 0 \iff g(0) = 0.$$

Således återstår det att beräkna $g'(0)$, detta gör vi genom implicit derivering.

Definiera funktionen $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ via $H(x) = x \cos(xg(x)) + g(x)$. Enligt ekvationen i uppgiften så är $H(x) = 0$ för varje $x \in \mathbb{R}$, och speciellt så innebär detta att $H'(x) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Med hjälp av våra deriveringsregler kan vi beräkna derivatan av H i termer av g, g' som

$$H'(x) = \cos(xg(x)) - x \sin(xg(x))(g(x) + xg'(x)) + g'(x).$$

Genom att använda att $H'(0) = 0$ och $g(0) = 0$ så gäller det att

$$0 = 1 + 0 \cdot \sin(0 \cdot 0)(0 + 0 \cdot g'(0)) + g'(0) = 1 + g'(0) \implies g'(0) = -1.$$

Detta ger oss att linjäriseringen av g kring $x = 0$ ges av $L(x) = -x$.

Svar: Linjäriseringen av g kring $x = 0$ ges av $x \mapsto -x$.

8. Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

är divergent. Detta kan visas på flertalet olika vis, här väljer vi att göra det med hjälp av följande följsats till jämförelsekriteriet för serier som bevisades under föreläsning 23:

Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är två positiva serier vars termer uppfyller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

för något tal $L \neq 0$. Då är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent om och endast om serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent.

Vi vill använda detta tillsammans med att vi vet att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent (detta har vi visat i kursen). För att använda satsen med de två serierna $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ så behöver kolla att satsen villkor är uppfyllda:

- bägge serier är positiva,
- vi behöver också visa att kvoten av termerna i serien har ett nollskilt gränsvärde då $n \rightarrow \infty$.

Det första antagandet är sant då $1/n > 0$ för $n \geq 1$ och $\sin(x)$ är positiv för $x \in (0, \pi)$ så är $\sin(1/n) > 0$ för $n \geq 1$.

För att visa att det andra antagandet är uppfyllt behöver vi studera gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Detta kan göras, till exempel, med hjälp av Taylors sats. Då $1/n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ säger Taylors sats att

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Vi har därför att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1.$$

Då $1 \neq 0$ så säger satsen oss således att antingen är båda serierna konvergenta eller så är båda serierna divergenta. Eftersom vi vet att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent så medför detta att serien i uppgiften är divergent.

Svar: Serien är divergent.