

Tentamen
Chalmers tekniska högskola & Göteborgs universitet
Matematisk analys TMV170/MVE045/MMGD30

2024-05-31, 14.00–18.00

Examinator: Simon Larson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Simon Larson, telefon: 031-772 6457

Hjälpmedel: Inga

Totalt kan man få 50 poäng.

TMV170/MVE045: För betyget 3 krävs minst 20 poäng. För betyg 4 eller 5 krävs 30 resp. 40 poäng.

MMGD30: För betyget G krävs minst 20 poäng. För betyget VG krävs 36 poäng.

Skriv personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* blad.

Behandla endast en uppgift per blad (deluppgifter på samma blad är dock ok). Sortera och numrera dina blad innan du lämnar in. Motivera alla dina svar väl och renskriv dina lösningar. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. Använd inte röd penna.

-
1. (a) Beräkna integralen

$$\int x \ln(1 + x^2) dx .$$

- (b) Beräkna integralen

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x - 6} dx .$$

- (c) Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^\pi \frac{1}{x - \pi} dx$$

är konvergent eller divergent. (8p)

2. (a) Hitta den lösningen till differentialekvationen

$$u'(t) - \cos(t)u(t)^2 = \cos(t) \quad \text{som uppfyller att } u(0) = 0 .$$

- (b) Hitta alla lösningar till differentialekvationen

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} . \quad (6p)$$

3. Bevisa följande påstående som ingår i analysens huvudsats: Om $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion och $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieras som

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds ,$$

då är funktionen G deriverbar och $G'(x) = g(x)$. (6p)

VÄND!

4. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieras av $f(x) = 2x^2 + \cos(2x)$.

- (a) Bestäm Taylorpolynomet till f av ordning 4 kring 0.
- (b) Använd Taylors sats för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^4}.$$

- (c) För vilket tal $k \in \mathbb{R}$ är funktionen

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - 1}{x^4} & \text{för } x > 0 \\ k & \text{för } x \leq 0 \end{cases}$$

kontinuerlig?

(6p)

5. Betrakta funktionen f som ges av $f(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln(x)$.

- (a) Bestäm definitionsmängden för f .
- (b) Finn alla vertikala, horisontella, och sneda asymptoter till funktionsgrafen $y = f(x)$.
- (c) Bestäm de intervall där f är växande respektive avtagande.
- (d) Avgör om f har några lokala eller globala extremvärden. Bestäm i så fall dessa värden och vart de antas.
- (e) Använd svaren i (a)-(d) för att bestämma värdemängden för f .
- (f) Använd svaren i (a)-(e) för att skissa funktionsgrafen till f .

(8p)

6. Låt $z = 3 - i\sqrt{3}$.

- (a) Skriv z på polär form.
- (b) Det finns två $w \in \mathbb{C}$ sådana att $|w| = 1$ och realdelen av $\frac{z}{w}$ är noll, bestäm dessa tal.

(4p)

7. Det existerar en deriverbar funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller att

$$x \cos(xg(x)) + g(x) = 0$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. Bestäm linjäriseringen av g kring $x = 0$.

(6p)

8. Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

är konvergent eller divergent.

(6p)

Lycka till!
Simon