

LÖSNINGSFÖRSLAG TENTA 2024-08-22

1.(a) Vi använder oss av instängningssatsen och att $x \mapsto e^x - 1$ är en kontinuerlig funktion med värdet noll då $x = 0$. Då det för varje x gäller att $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ så har vi

$$-|e^x - 1| \leq \sin(1/x)(e^x - 1) \leq |e^x - 1|.$$

Eftersom $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ så är gränsvärdet av både den övre och undre uppskattningen 0. Således ger instängningssatsen att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)(e^x - 1) = 0.$$

Svar: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)(e^x - 1) = 0$.

(b) Vi har ett gränsvärde på formen av en kvot av två funktioner där vi vill använda oss av l'Hôpitals andra regel. För att göra detta behöver vi kontrollera ett antal villkor. Låt $g(x) = x$ och $f(x) = \ln(1 + e^x)$ så att kvoten vi är intresserade av är $\frac{f(x)}{g(x)}$. För att använda l'Hôpitals regel behöver vi kontrollera att följande villkor är uppfyllda:

- (1) Derivatan av funktionen i nämnaren, g , är skild från noll i gräns; detta gäller i vårt fall då i vårt fall är $g'(x) = 1$ för all $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Både täljare och nämnare har det oegentliga gränsvärdet ∞ ; för nämnaren är detta i vårt fall uppenbart då $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, för täljaren följer eftersom båda funktionerna $s \mapsto e^s$ och $s \mapsto \ln(1 + s)$ växer mot oändligheten då $s \rightarrow \infty$ så detsamma gäller f som är deras sammansättning.
- (3) gränsvärdet av kvoten av täljaren och nämnarens derivator existerar; i vårt fall har vi att $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ och $g'(x) = 1$ så

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$$

där vi i sista steget använde räknereglerna för gränsvärden och att $e^{-x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$. Så gränsvärdet av kvoten av derivator existerar.

Eftersom alla antaganden var uppfyllde säger l'Hôpitals regel att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = 1.$$

Vilket var det som skulle visas.

(c) Vi förkortar bråket med x och använder räkneregler för gränsvärden tillsammans med gränsvärdet som studerades i (b), detta ger

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi x + \sin(\pi x)}{\ln(1 + e^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi + \frac{\sin(\pi x)}{x}}{\left(\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right)} = \pi,$$

där vi använde att $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pi + \frac{\sin(\pi x)}{x}\right) = \pi$ då $\sin$ är begränsad och $x \rightarrow \infty$.

Svar: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi x + \sin(\pi x)}{\ln(1 + e^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi + \frac{\sin(\pi x)}{x}}{\left(\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right)} = \pi.$

(d) Vi använder oss av att $s \rightarrow \arctan(s)$ är en kontinuerlig funktion som uppfyller att

$$\arctan(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \arctan(s) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} \arctan(s) = -\frac{\pi}{2}.$$

Eftersom

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

så följer det från de gränsvärden som listades ovan att

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(x) + \lim_{s \rightarrow \infty} \arctan(s) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan(x) + \lim_{s \rightarrow -\infty} \arctan(s) = -\frac{\pi}{2}.$$

Så både höger- och vänstergränsvärdet existerar men eftersom de har olika värden kan inte gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existera.

Svar: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\frac{\pi}{2},$ men gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existerar inte.

2.(a) Vi använder oss av partiell integration där vi ser integranden som produkten av faktorerna e^{-x} och $1 - x$ och tar en primitiv av den första faktorn och deriverar den andra. Detta ger oss

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x}(1-x) dx &= [-e^{-x}(1-x)]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})(-1) dx \\ &= -e^{-1}(1-1) + e^{-0}(1-0) - \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= 1 - [-e^{-x}]_0^1 \\ &= 1 + e^{-1} - e^{-0} \\ &= e^{-1}. \end{aligned}$$

Svar: $\int_0^1 e^{-x}(1-x) dx = \frac{1}{e}.$

(b) Vi använder variabelsubstitution där vi som ny variabel definierar $s = \sqrt{1+x^2}$ vilket ger $ds = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ och således

$$\int \frac{\sin(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} x dx = \int \sin(s) ds = -\cos(s) + C = -\cos(\sqrt{1+x^2}) + C.$$

Svar: $\int \frac{\sin(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} x dx = -\cos(\sqrt{1+x^2}) + C.$

(c) Eftersom $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så har vi att

$$0 \leq \frac{1 - \cos(x)^2}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}.$$

Eftersom vi vet att den generaliserade integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ är konvergent så följer det från jämförelsekriteriet att den generaliserade integralen $\int_1^\infty \frac{1 - \cos(x)^2}{x^2} dx$ är konvergent.

Svar: Den generaliserade integralen $\int_1^\infty \frac{1 - \cos(x)^2}{x^2} dx$ är konvergent.

3. Enligt definitionen av kontinuitet så är f kontinuerlig i $x_0 \in (a, b)$ om och endast om

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Genom att flytta $f(x_0)$ till vänsterledet och skriva x som $x_0 + h$ kan detta ekvivalent skrivas som att

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0. \quad (1)$$

Vi vill visa att detta är sant om vi vet att f är deriverbar i x_0 .

Enligt definitionen av att f är deriverbar i x_0 så existerar gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

och dess värde är $f'(x_0)$. Utifrån att detta gränsvärdet existerar och att $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$ så kan vi använda räknereglererna för gränsvärden för observera att

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{h}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\rightarrow f'(x_0)} = 0 \cdot f'(x_0) = 0.$$

Vi har således visat att (1) är uppfyllt och på så vis att f är kontinuerlig i x_0 . Eftersom x_0 var en godtycklig punkt i (a, b) är f kontinuerlig på (a, b) vilket var det vi ville visa.

4. Enligt Taylors sats så gäller det att $h(t) = 1 + 2t + \frac{3}{2}t^2 + O(t^3)$ då $t \rightarrow 0$. För täljaren leder detta till

$$\begin{aligned}(a + bt + ct^2)h(t) + t &= (a + bt + ct^2)\left(1 + 2t + \frac{3}{2}t^2 + O(t^3)\right) + t \\ &= a + (2a + b + 1)t + \left(\frac{3}{2}a + 2b + c\right)t^2 + O(t^3)\end{aligned}$$

då $t \rightarrow 0$, där vi använde räknereglererna för stora ordo.

Gränsvärdet

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a + bt + ct^2)h(t) + t}{t^2}$$

är noll om och endast om de tre första koefficienterna i Taylor polynomet för täljaren är noll, det vill säga om

$$a = 0, \quad 2a + b + 1 = 0, \quad \text{och} \quad \frac{3}{2}a + 2b + c = 0.$$

Detta följer då vi finner att om $a \neq 0$ då har vi enligt Taylor utvecklingen av täljaren som vi fann ovan att

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a + bt + ct^2)h(t) + t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a + (2a + b + 1)t + \left(\frac{3}{2}a + 2b + c\right)t^2 + O(t^3)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a + O(t)}{t^2}$$

vilket har det oegentliga gränsvärdet ∞ om $a > 0$ och det oegentliga gränsvärdet $-\infty$ om $a < 0$. Således kan gränsvärdet i uppgiften bara existera om $a = 0$.

Givet att $a = 0$ så finner vi på samma sätt att om den andra koefficienten i Taylor polynomet för täljaren, $2a + b + 1 = b + 1$ (eftersom $a = 0$), är skild från noll så är

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a + bt + ct^2)h(t) + t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a + (2a + b + 1)t + \left(\frac{3}{2}a + 2b + c\right)t^2 + O(t^3)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{b + 1 + O(t)}{t}$$

vilket har det oegentliga gränsvärdet ∞ om $b + 1 > 0$ och det oegentliga gränsvärdet $-\infty$ om $b + 1 < 0$. Således måste även den andra koefficienten i Taylor polynomet för täljaren vara noll för att gränsvärdet i uppgiften ska existera, d.v.s $2a + b + 1 = b + 1 = 0$.

På samma vis som ovan så finner vi, givet att $a = 0, 2a + b + 1 = 0$, att gränsvärdet i uppgiften kan skrivas om som

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a + bt + ct^2)h(t) + t}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a + (2a + b + 1)t + \left(\frac{3}{2}a + 2b + c\right)t^2 + O(t^3)}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2}a + 2b + c + O(t)\right) = \frac{3}{2}a + 2b + c,\end{aligned}$$

så gränsvärdet är noll om och endast om $a = 0, 2a + b + 1 = 0$, och $\frac{3}{2}a + 2b + c = 0$.

Om vi löser det linjära ekvationssystemet så finner vi att $a = 0$, $b = -1$, och $c = 2$.

Svar: $a = 0$, $b = -1$, och $c = 2$.

5. Vi börjar med lite observationer angående funktionen f . Då f är summan av den rationella funktionen $x \mapsto \frac{x^2}{x^2-1}$ vars naturliga definitionsmängd är $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ och funktionen $x \mapsto 2 \ln(1 - x^2)$ vars definitionsmängd är $(-1, 1)$ (alla tal sådana att $1 - x^2$ tillhör definitionsmängden för logaritmen som är $(1, \infty)$). Således är den naturliga definitionsmängden för f skärningen av dessa två mängder, det vill säga

$$D_f = (\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}) \cap (-1, 1) = (-1, 1),$$

vilket är just den definitionsmängden som är angiven i uppgiften. Då funktionerna $x \mapsto \ln(x)$ och $x \mapsto 1 - x^2$ är kontinuerliga och deriverbara funktioner så är deras sammansättning kontinuerlig och deriverbar på sin naturliga definitionsmängd, $(-1, 1)$. Likaså är den rationella funktionen $x \mapsto \frac{x^2}{x^2-1}$ kontinuerlig och deriverbar på sin definitionsmängd. Således är f som summan av dessa funktioner kontinuerlig och deriverbar på $(-1, 1)$.

Enligt deriveringsreglerna finner vi att derivatan av f ges av

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2(2x)}{(x^2 - 1)^2} - 2 \frac{-2x}{1 - x^2} = \frac{2x - 4x^3}{(x^2 - 1)^2}.$$

(a) Då vi argumenterat ovan att f är kontinuerlig på $(-1, 1)$ så återstår det att kontrollera ifall funktionsgrafen till f har några vertikala asymptoter då x närmar sig -1 eller 1 . Med andra ord behöver vi avgöra ifall $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)$ eller $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ existerar som ett oegentligt gränsvärde.

Vi finner att

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \underbrace{\left(\frac{1}{x^2 - 1} \right)}_{\rightarrow -\infty} \left(\underbrace{x^2}_{\rightarrow 1} + \underbrace{2(1 - x^2) \ln(1 - x^2)}_{\rightarrow 0} \right) = -\infty,$$

där vi använde oss av standardgränsvärdet $\lim_{s \rightarrow 0+} s \ln(s) = 0$, att $x^2 - 1 < 0$ för alla $x \in (-1, 1)$, och räkneregler för oegentliga gränsvärden.

På samma vis finner vi att

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \underbrace{\left(\frac{1}{x^2 - 1} \right)}_{\rightarrow -\infty} \left(\underbrace{x^2}_{\rightarrow 1} + \underbrace{2(1 - x^2) \ln(1 - x^2)}_{\rightarrow 0} \right) = -\infty.$$

Vi har således visat att $x = 1$ och $x = -1$ båda är vertikala asymptoter för funktionsgrafen $y = f(x)$.

Svar: Funktionsgrafen har två vertikala asymptoter, nämligen $x = 1$ och $x = -1$.

(b) Som argumenterats ovan så är f kontinuerlig och deriverbar på hela sin definitions-
mängd. Således kan vi bestämma de intervall där f är växande respektive avtagande genom
att studera tecknet av f' . Vi beräknade ovan derivatan av f :

$$f'(x) = \frac{2x - 4x^3}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{för } x \in (-1, 1).$$

Då nämnaren $(x^2 - 1)^2$ är positiv för varje $x \in (-1, 1)$ avgörs tecknet av f' av uttrycket i
täljaren, $2x - 4x^3$. Då $x \mapsto 2x - 4x^3$ är en kontinuerlig funktion så kan teckenväxlingar av
derivatan av f enbart ske i nollställena till polynomet $2x - 4x^3$. Vi finner dessa nollställena
via kvadratkomplettering:

$$2x - 4x^3 = 2x(1 - 2x^2) = 0 \iff x = 0, x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ eller } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Notera att eftersom $\sqrt{2} > 1$ så tillhör alla dessa tre punkterna det relevanta intervallet
 $(-1, 1)$.

Genom att beräkna värdet av f' i en punkt i varje av intervallen $(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$
och $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ hittar vi teckentabellen:

	$-1 < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$
f'	+	0	-	0	+	0	-
f	$\nearrow$	$2\ln(2) - 1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2\ln(2) - 1$	$\searrow$

Vi har således visat att f är växande på de två intervallen $(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ och $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ samt
avtagande på de två intervallen $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ och $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$. Då vi argumenterat ovan att f är
kontinuerlig på $(-1, 1)$ samt att f har vertikala asymptoter $x = -1$ och $x = 1$ så gäller
det att f är växande på de två intervallen $(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ och $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ samt avtagande på de två
intervallen $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$ och $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$.

Svar: f är växande på de två intervallen $(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ och $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ samt avtagande på de två
intervallen $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$ och $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$

(c) Enligt teckentabellen i (b) så har f kritiska punkter i $x = 0, x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ och $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Punkten $x = 0$ är ett lokalt minimum där funktionsvärdet är 0. Punkterna $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ och
 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ är lokala maximum där funktionsvärdet är $2\ln(2) - 1$. Då definitionsmängden till
 f är öppen och f är deriverbar på hela sin definitionsmängd så är detta de enda lokala
extrempunkterna som existerar.

Då vi visat i (a) att

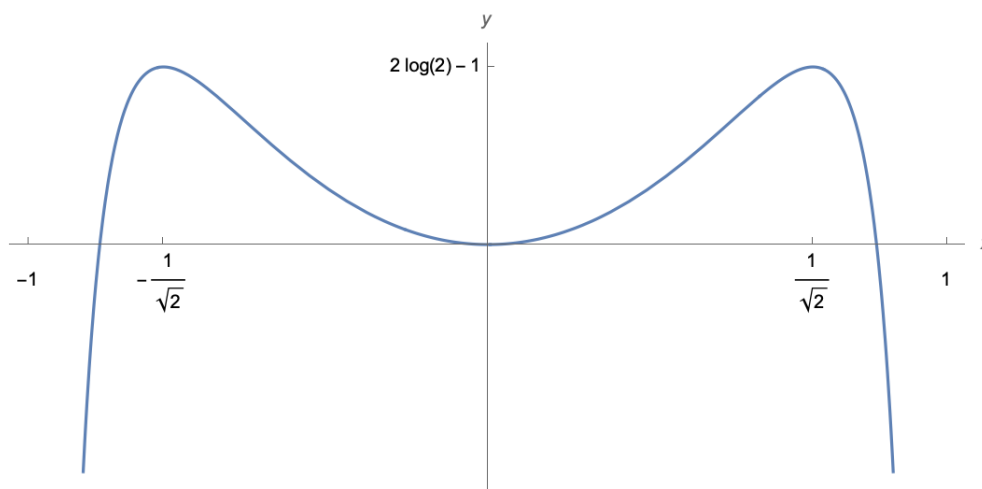
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty,$$

så drar vi slutsatsen att f saknar både globalt minimum och att de lokala maximum som fanns i $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ är globala maximum.

Svar: f saknar globalt minimum, f har globala (och lokala) maximum i $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ samt $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ där funktionens värde är $2\ln(2) - 1$, och f har slutligen ett lokalt minimum i $x = 0$ där funktionens värde är 0.

(d) **Svar:** I figuren nedan visas grafen till f . Vi noterar de egenskaper som diskuterats ovan

- f är definierad på $(-1, 1)$ med vertikala asymptoter $x = -1$ och $x = 1$ där, i båda fallen, f har det oegentliga gränsvärdet $-\infty$,
- f är växande på $(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ och $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ och avtagande på $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$ och $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$,
- f saknar globalt minimum, f har globala (och lokala) maximum i $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ samt $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ där funktionens värde är $2\ln(2) - 1$, och f har slutligen ett lokalt minimum i $x = 0$ där funktionens värde är 0.



6. Vi börjar med att skriva z på polär form. För absolutbeloppet av z finner vi

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

För att beräkna argumentet av z behöver vi alltså hitta $\theta \in \mathbb{R}$ så att

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

vilket är det samma som att $\cos(\theta) = 1/\sqrt{2}$ och $\sin(\theta) = 1/\sqrt{2}$. Dessa trigonometriska ekvationerna har lösningarna $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ för $k \in \mathbb{Z}$.

Om $w \in \mathbb{C}$ kan skrivas på polär form som $w = |w|(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = |w|e^{i\phi}$ så har vi att $w^8 = |w|^8(\cos(8\phi) + i\sin(8\phi)) = |w|^8 e^{i8\phi}$. Således om $w^8 = z$ så måste det gälla att $|w|^8 = |z| = 1$ och att $8\phi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Detta ger oss att

$$|w| = 1 \quad \text{och} \quad \phi = \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}$$

för något $k \in \mathbb{Z}$.

Vi har alltså funnit att alla lösningar till $w^8 = z$ kan skrivas på polär form som

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}\right)$$

för något $k \in \mathbb{Z}$. Eftersom $\cos, \sin$ är 2π -periodiska så sammanfaller de två lösningar som ges av $k = k_1$ resp. $k = k_2$ om och endast om $\frac{\pi}{32} + \frac{k_1\pi}{4} = \frac{\pi}{32} + \frac{k_2\pi}{4} + 2j\pi$ för något $j \in \mathbb{Z}$, d.v.s om $k_1 = k_2 + 8j$ med $j \in \mathbb{Z}$. Vi har alltså 8 olika lösningar som kan representeras som

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos\left(\frac{\pi}{32}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{32}\right), \\ w_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{32}\right) + i\cos\left(\frac{7\pi}{32}\right), \\ w_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{32}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{32}\right), \\ w_3 &= \cos\left(\frac{\pi}{32} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{32} + \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{32}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{32}\right), \\ w_4 &= \cos\left(\frac{\pi}{32} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{32} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{32}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{32}\right), \\ w_5 &= \cos\left(\frac{\pi}{32} + \frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{32} + \frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{32}\right) - i\cos\left(\frac{7\pi}{32}\right), \\ w_6 &= \cos\left(\frac{\pi}{32} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{32} + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{32}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{32}\right), \\ w_7 &= \cos\left(\frac{\pi}{32} + \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{32} + \frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{32}\right) - i\sin\left(\frac{7\pi}{32}\right). \end{aligned}$$

Svar: Ekvationen har de 8 olika lösningarna som listats ovan.

7. Genom att dela upp K i cirkulära skivor ortogonala mot x -axeln så finner vi att massan (mätt i kg) av K ges av integralen

$$\int_0^{\pi/2} \pi(1 + \sin(x))^2 \cos(x) \, dx.$$

Detta kan härledas genom att approximera massan via en Riemannsumma där man använder att kroppens densitet är väl approximerat av $m(x_1) = \cos(x_1)$ kg/m³ i skivan av

K där x -koordinaten tillhör intervallet $[x_1, x_1 + \Delta]$ och volymen av denna skiva är väl approximerat av $\pi(1 + \sin(x_1))^2 \Delta \text{ cm}^3$ för Δ tillräckligt litet.

Eftersom $(1 + \sin(x))^3 = 3(1 + \sin(x))^2 \cos(x)$ finner vi att

$$\int_0^{\pi/2} \pi(1 + \sin(x))^2 \cos(x) dx = \left[\frac{\pi}{3} (1 + \sin(x))^3 \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{3} (1 + \sin(\pi/2))^3 - \frac{\pi}{3} (1 + \sin(0))^3 = \frac{8\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}.$$

Svar: Massan av K är $\frac{7\pi}{3}$ kg.

8. (a) Differentialekvationen är en icke homogen linjär ekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Vi finner alla lösningar till ekvationen genom att först hitta alla lösningar till den homogena ekvationen $y_h''(t) + 2y_h'(t) + y_h(t) = 0$ och hitta *en* partikulärlösning till ekvationen $y_p''(t) + 2y_p'(t) + y_p(t) = 2e^{-t}$. Då ges lösningar till differentialekvationen i uppgiften som $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

För att hitta den allmänna lösningen till den homogena ekvationen löser vi den karakteristiska ekvationen $r^2 + 2r + 1 = 0$. Eftersom denna ekvationen kan skrivas som $(r + 1)^2 = 0$ har vi en dubbelrot i $r = -1$. Enligt sats i kursen ges då den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y_h''(t) + 2y_h'(t) + y_h(t) = 0$ av

$$y_h(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t} \quad \text{med } A, B \in \mathbb{R}.$$

För att hitta en partikulärlösning gör vi en ansats. En naturlig ansats att testa är $t \mapsto Ce^{-t}$ för $C \in \mathbb{R}$, men då vi precis visat att denna funktionen löser den homogena ekvationen så kommer detta inte fungera, detsamma gäller ansatsen $t \mapsto Cte^{-t}$ för $C \in \mathbb{R}$. Vi gör därför istället ansatsen $t \mapsto Ct^2e^{-t}$ för $C \in \mathbb{R}$. Vi har att

$$(Ct^2e^{-t})' = (2Ct - Ct^2)e^{-t} \quad \text{och} \quad (Ct^2e^{-t})'' = (2C - 4Ct + Ct^2)e^{-t}$$

Så insatt i vänsterledet för ekvationen beräknar vi då att

$$(Ct^2e^{-t})'' + 2(Ct^2e^{-t})' + (Ct^2e^{-t}) = (2C - 4Ct + Ct^2)e^{-t} + 2(2Ct - Ct^2)e^{-t} + Ct^2e^{-t} = 2Ce^{-t}.$$

Genom att välja $C = 1$ finner alltså att $y_p(t) = t^2e^{-t}$ är en lösning till vår ekvation.

Vi drar slutsatsen att lösningarna till den generella lösningen till differentialekvationen i uppgiften ges av

$$y(t) = t^2e^{-t} + Ae^{-t} + Bte^{-t} \quad \text{med } A, B \in \mathbb{R}.$$

Svar: Lösningarna ges av $y(t) = t^2e^{-t} + Ae^{-t} + Bte^{-t}$ med $A, B \in \mathbb{R}$.

(b) För att hitta lösningen som uppfyller att $y'(0) = y'(1) = 0$ så behöver vi bestämma de fria konstanterna A, B i den allmänna formeln för lösningarna som vi hittade i (a).

Detta gör vi genom att beräkna värdet av derivatan till en lösning i $t = 0$ och $t = 1$; om $y(t) = t^2e^{-t} + Ae^{-t} + Bte^{-t}$ med $A, B \in \mathbb{R}$ så har vi

$$y'(t) = 2te^{-t} - t^2e^{-t} - Ae^{-t} + Be^{-t} - Bte^{-t} = (-A + B)e^{-t} + (2 - B)te^{-t} - t^2e^{-t}.$$

Därav gäller det att

$$y'(0) = -A + B \quad \text{och} \quad y'(1) = (-A + B + 2 - B - 1)e^{-1} = (1 - A)e^{-1}.$$

Så $y'(0) = 0$ ger att $A = B$ och att $y'(1) = 0$ ger att $A = 1$. Tillsammans finner vi alltså att den sökta lösningen är den som ges av att $A = B = 1$, det vill säga

$$y(t) = t^2e^{-t} + e^{-t} + te^{-t} = (1 + t + t^2)e^{-t}.$$

Svar: Den sökta lösningen är $y(t) = (1 + t + t^2)e^{-t}$.