

Tentamen
Chalmers tekniska högskola & Göteborgs universitet
Matematisk analys TMV170/MVE045/MMGD30

2024-08-22, 14.00–18.00

Examinator: Simon Larson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Simon Larson, telefon: 031-772 6457

Hjälpmedel: Inga

Totalt kan man få 50 poäng.

TMV170/MVE045: För betyget 3 krävs minst 20 poäng. För betyg 4 eller 5 krävs 30 resp. 40 poäng.

MMGD30: För betyget G krävs minst 20 poäng. För betyget VG krävs 36 poäng.

Skriv personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* blad.

Behandla endast en uppgift per blad (deluppgifter på samma blad är dock ok). Sortera och numrera dina blad innan du lämnar in. Motivera alla dina svar väl och renskriv dina lösningar. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. Använd inte röd penna.

-
1. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)(e^x - 1)$.
- (b) Visa att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = 1$.
- (c) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi x + \sin(\pi x)}{\ln(1 + e^x)}$.
- (d) Låt $g: \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definieras av $g(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$. Avgör vilket eller vilka av de tre gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x),$$

som existerar och beräkna dessa gränsvärden. Om något av gränsvärdena inte existerar, förklara varför det inte gör det.

Tips: På uppgift (c) kan det vara användbart att använda gränsvärdet från (b). (8p)

2. (a) Beräkna integralen $\int_0^1 \frac{1-x}{e^x} dx$.
- (b) Beräkna den obestämda integralen $\int \frac{\sin(\sqrt{1+x^2})x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.
- (c) Avgör ifall den generaliserade integralen $\int_1^\infty \frac{1 - \cos(x)^2}{x^2} dx$ är konvergent eller divergent. (6p)

3. Bevisa att om en funktion $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar så är g även kontinuerlig. (6p)

VÄND!

4. Använd Taylors sats för att bestämma talen a, b, c så att

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a + bt + ct^2)h(t) + t}{t^2} = 0$$

om funktionen $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är tre gånger kontinuerligt deriverbar på hela $\mathbb{R}$ och uppfyller att

$$h(0) = 1, \quad h'(0) = 2, \quad h''(0) = 3. \quad (6p)$$

5. Betrakta funktionen $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} - 2 \ln(1 - x^2)$.

- (a) Finn alla asymptoter till funktionsgrafen $y = f(x)$.
- (b) Bestäm de intervall där f är växande respektive avtagande.
- (c) Avgör om f har några lokala eller globala extremvärden. Bestäm i så fall dessa värden och vart de antas.
- (d) Använd svaren i (a)-(c) för att skissa funktionsgrafen till f . (8p)

6. Låt $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Hitta samtliga komplexa tal w sådana att $w^8 = z$, ange lösningarna på polär form. Hur många olika lösningar finns det? (4p)

7. Låt K vara den rotationskropp som uppkommer då grafen till funktionen $h: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av $h(x) = 1 + \sin(x)$ roteras kring x -axeln. Enheten på koordinataxlarna är centimeter och densiteten av kroppen K varierar som en funktion av x -koordinaten enligt $m(x) = \cos(x)$ kg/cm³. Vad är den totala massan av K ? (6p)

8. (a) Hitta alla lösningar till differentialekvationen

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2e^{-t}.$$

- (b) Finn den lösningen som har egenskapen att $y'(0) = y'(1) = 0$. (6p)

Lycka till!
Simon