

1 a) Enligt Taylors sats så gäller det att

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad \text{då } x \rightarrow 0.$$

Därför finner vi att

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)) - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + O(x)\right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Svar: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int h(x) dx &= \int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \left[\begin{array}{l} \text{variabelsubstitution} \\ \ln(x) = u \\ \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \end{array} \right] \\ &= \int \frac{1}{u} du = \ln(u) + C \\ &= \ln(\ln(x)) + C. \end{aligned}$$

Svar: Varje primitiv funktion till h har formen
 $\ln(\ln(x)) + C$ för något $C \in \mathbb{R}.$

c) Enligt kvotregeln och kedjeregeln har vi att

$$\begin{aligned} f'(x) &= - \frac{1}{(2 + \sin(\cos(x)))^2} \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)) \\ &= \frac{\cos(\cos(x)) \sin(x)}{(2 + \sin(\cos(x)))^2} \end{aligned}$$

Svar: $f'(x) = \frac{\cos(\cos(x)) \sin(x)}{(2 + \sin(\cos(x)))^2}$

d) Vi använder partiell integration

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos(\pi+x) dx &= \left[x \sin(\pi+x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(\pi+x) dx \\ &= \left[x \sin(\pi+x) + \cos(\pi+x) \right]_0^{\pi} \\ &= \pi \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} + \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \underbrace{0 \cdot \sin(0)}_{=0} - \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Svar: $\int_0^{\pi} x \cos(\pi+x) dx = 2.$

2. Observera att på intervallet $(-\infty, 3)$ ges g av $\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$. Då detta är en rationell funktion vars nämnare är skild från 0 på det relevanta intervallet är g kontinuerlig och deriverbar på $(-\infty, 3)$.

På samma sätt ges g på intervallet $[3, \infty)$ av $kx + \frac{9}{x}$ som även det är en kontinuerlig och deriverbar funktion på intervallet i fråga.

Därför räcker det i både a) och b) att studera kontinuiteten/deriverbarheten av g i $x=3$.

a) g är kontinuerlig i $x=3$ om och endast om $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3)$.

Enligt definitionen av g har vi att

$$g(3) = k \cdot 3 + \frac{9}{3} = 3k + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(kx + \frac{9}{x} \right) = k \cdot 3 + \frac{9}{3} = 3k + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 2) = 3 + 2 = 5$$

polynomialdivision

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = x + 2 \text{ för } x \neq 3.$$

Vi finner att g är kontinuerlig om och endast om $5 = 3k + 3 \iff k = \frac{2}{3}$.

Svar: g är kontinuerlig om och endast om $k = \frac{2}{3}$.

b) Vi har visat i kursen att om en funktion är deriverbar så är den kontinuerlig.

Således kan g bara vara deriverbar om $k = \frac{2}{3}$. För att avgöra om så är fallet behöver vi förlita oss på derivatans definition.

g är deriverbar i $x=3$ om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} \text{ existerar.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{2}{3}(3+h) + \frac{9}{3+h}\right) - 5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{h} \left(\frac{9}{3+h} - 3 \right) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{h} \cdot \frac{9 - 3(3+h)}{3+h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{3+h} \right) = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\left(\frac{(3+h)^2 - (3+h) - 6}{(3+h) - 3} \right) - 5}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(3+h) + 2 - 5}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} 1 = 1.
 \end{aligned}$$

$$\text{Dä} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(3+h) - g(3)}{h}$$

så är g ej deriverbar i $x=3$.

Svar: det finns inget val av k så att g är deriverbar.

3. Se anteckningar från föreläsning 7
(finns på Canvas under Moduler).

4. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $D_f = [-1, \infty)$.

Vi har att $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$f''(x) = -\frac{1}{4(x+1)^{3/2}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8(x+1)^{5/2}}$$

a) Taylor polynomet till f av grad 2 kring 0 är enligt definitionen

$$\begin{aligned} p(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \end{aligned}$$

Svar: $p(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

b) Enligt Taylors sats finns det för varje $x \geq 0$ ett $\alpha \in [0, x]$ sådant att

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + \frac{f'''(\alpha)}{3!}x^3 \\ &= p(x) + \frac{x^3}{16(\alpha+1)^{5/2}} \end{aligned}$$

Detta medför då $x \geq 0$, $\alpha \in [0, x]$ att

$$|f(x) - p(x)| = \frac{x^3}{16(\alpha+1)^{5/2}}$$

Eftersom $\alpha \mapsto \frac{1}{(\alpha+1)^{5/2}}$ är en avtagande funktion

på $[0, \infty)$ finner vi att

$$|f(x) - p(x)| = \frac{x^3}{16(\alpha+1)^{5/2}} \leq \frac{x^3}{16}, \quad \text{vilket}$$

var det vi ville visa.

c) då $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{3/2}$ ges vårt närmestvärde
 av $p(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 8} = \frac{32+8-1}{32} = \frac{39}{32}$.

Felet i approximationen är $|\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{39}{32}| = |f(\frac{1}{2}) - p(\frac{1}{2})|$.

Enligt b) har vi att

$$|\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{39}{32}| \leq \frac{(\frac{1}{2})^3}{16} = \frac{1}{8 \cdot 16} = \frac{1}{128}$$

Svar: $\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \frac{39}{32}$ och felet i denna approximation
 är mindre än $\frac{1}{128}$.

5. Låt l beteckna längden på en av sidorna
 av lådens kvadratiske botten och h höjden av
 lådan. Båda längder anges i cm.

Volymen av lådan ges då av

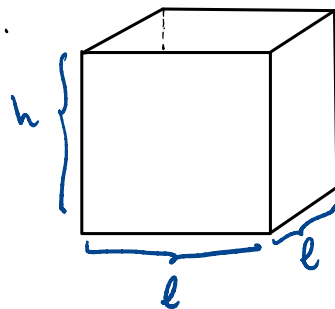
$$V = l^2 \cdot h \text{ cm}^3$$

och den totala arean av

$$A = l^2 + 4 \cdot l \cdot h \text{ cm}^2$$

↑
bottens
area

↑
arean av de 4
sidorna.



Då volymen är fixerad $V = 256 \text{ cm}^3$ finner vi

att l och h är relaterade enligt $256 = l^2 \cdot h$

$$\Leftrightarrow h = \frac{256}{l^2}$$

Således kan vi uttrycka A som en funktion av
enbart l enligt $A = l^2 + 4 \cdot \frac{256}{l} = l^2 + \frac{1024}{l}$.

För att hitta minsta värdet på arean vill vi alltså
finna minimum för funktionen $A(l) = l^2 + \frac{1024}{l}$
med $l > 0$.

Notera att detta är en kontinuerlig och deriverbar
funktion på $(0, \infty)$ och att

$$\lim_{l \rightarrow \infty} A(l) = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{l \rightarrow 0^+} A(l) = +\infty$$

så A har ett globalt minimum på $(0, \infty)$.

Vi söker detta minimum genom en teckenstudie
av derivatan av A .

$$A'(l) = 2l - \frac{1024}{l^2}$$

$$A'(l) = 0 \iff 0 = 2l - \frac{1024}{l^2}$$

$$\iff l^3 = 512 \iff l = 8.$$

Vi har alltså

	$l \rightarrow 0^+$	$0 < l < 8$	$l = 8$	$l > 8$	$l \rightarrow \infty$
A'		-	0	+	
A	$+\infty$	$\searrow$	$A(8)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vi ser att vi har ett unikt globalt minimum som antas i $l=8$.

Då $h = \frac{256}{l^2}$ finner vi att de optimala

dimensionerna på lådan ges av $l=8\text{cm}$ och $h=4\text{cm}$

Svar: Lådans kvadratiske botten ska ha en sidelängd på 8cm och lådan ska ha en höjd på 4cm.

$$6. \quad \left(\frac{2i}{1-i\sqrt{3}} \right)^{15} = i^{15} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{-15}$$

på polar form har vi att $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ och $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$\text{så} \quad i^{15} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{-15} = e^{i\frac{15\pi}{2}} e^{i5\pi}$$

$$= \underbrace{e^{i7\pi}}_{=-1} \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_i \underbrace{e^{i5\pi}}_{=-1} = i.$$

$$\underline{\text{Svar}}: \quad \left(\frac{2i}{1-i\sqrt{3}} \right)^{15} = i.$$

7. a) $y'(x)e^{y(x)} = x$ är en separabel differentialekvation.

Vi kan enligt kedjeregeln skriva ekvationen som

$$(e^{y(x)})' = x \iff e^{y(x)} = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{för något } C \in \mathbb{R}.$$

Enligt begynnelsevillkoret $y(0)=1$ får vi att

$$e = e^{y(0)} = \frac{0^2}{2} + C = C \quad \text{så } C = e.$$

Går man ut ta logaritmen av bägge sidor av identiteten

$$e^{y(x)} = \frac{x^2}{2} + e$$

$$\text{får vi att } y(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2} + e\right).$$

Svar: $y(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2} + e\right).$

b) Detta är en inhomogen linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter.

Enligt en sats i kursen kan varje lösning skrivas som summan av en partikulärlösning till ekvationen och en lösning till motsvarande homogena ekvation

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen.

Lösningarna till den karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$

ges av $r = \pm i$. Enligt en sats i kursen kan

varje lösning till den homogena ekvationen skrivs

som $y_h(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$ med $A, B \in \mathbb{R}$.

För att hitta en partikulär lösning gör vi antagandet
 $x \mapsto Ce^x$ för $C \in \mathbb{R}$. Instöppt i vänsterledet av
ekvationen får vi:

$$(Ce^x)'' + Ce^x = Ce^x + Ce^x = 2Ce^x.$$

För att vår ansatz ska lösa ekvationen måste vi alltså
välja $C = \frac{1}{2}$. Vi har hittat partikulärlösningen $y_p(x) = \frac{e^x}{2}$.

Alla lösningar till $y''(x) + y(x) = e^x$ kan således

skrivas som

$$y(x) = \frac{e^x}{2} + A \cos(x) + B \sin(x) \text{ för}$$

något val av $A, B \in \mathbb{R}$.

För att hitta A, B använder vi att $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$.

$$y'(x) = \frac{e^x}{2} - A \sin(x) + B \cos(x)$$

Så vi har att $y(0) = \frac{1}{2} + A$ och $y'(0) = \frac{1}{2} + B$.

För att uppfylla villkoren behöver $A = \frac{1}{2}$ och $B = -\frac{1}{2}$.

Svar: $y(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2}$.

8. Vi vet hur snabbt vattnet läcker ut så vi behöver beräkna hur mycket vatten som finns i behållaren från början.

Volymen ges enligt formel i kursen av

$$V = \int_0^{10} e^{\pi h} dh = \left[\frac{e^{\pi h}}{\pi} \right]_0^{10} = \frac{e^{10\pi} - 1}{\pi} \text{ cm}^3.$$

Så allt vattnet har runnit ut efter

$$\frac{e^{10\pi} - 1}{15\pi} \text{ sekunder.}$$

Svar: $\frac{e^{10\pi} - 1}{15\pi} \text{ sekunder.}$