

Tentamen
Chalmers tekniska högskola & Göteborgs universitet
Matematisk analys TMV170/MVE045/MMGD30

2024-10-12, 14.00–18.00

Examinator: Simon Larson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Simon Larson, telefon: 031-772 6457

Hjälpmedel: Inga

Totalt kan man få 50 poäng.

TMV170/MVE045: För betyget 3 krävs minst 20 poäng. För betyg 4 eller 5 krävs 30 resp. 40 poäng.

MMGD30: För betyget G krävs minst 20 poäng. För betyget VG krävs 36 poäng.

Skriv personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* blad.

Behandla endast en uppgift per blad (deluppgifter på samma blad är dock ok). Sortera och numrera dina blad innan du lämnar in. Motivera alla dina svar väl och renskriv dina lösningar. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. Använd inte röd penna.

-
1. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$.
- (b) Bestäm samtliga primitiva funktioner till $h: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definierad av $h(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$.
- (c) Beräkna derivatan av funktionen $f(x) = \frac{1}{2 + \sin(\cos(x))}$.
- (d) Beräkna integralen $\int_0^\pi x \cos(\pi + x) dx$ (8p)

2. Låt funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieras av

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & \text{för } x < 3, \\ kx + \frac{9}{x} & \text{för } x \geq 3, \end{cases}$$

där $k \in \mathbb{R}$ är en konstant.

- (a) Finns något värde av konstanten k som gör att g blir en kontinuerlig funktion? Finn i så fall detta värde eller förklara varför det inte finns.
- (b) Finns det något värde av konstanten k som gör att g är en deriverbar funktion? Finn i så fall detta värde eller förklara varför det inte finns. (6p)
3. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för derivator. I ditt bevis får du utgå från Rolles sats utan att bevisa denna. (6p)

VÄND!

4. Betrakta funktionen $f(x) = \sqrt{x+1}$.

(a) Bestäm Taylorpolynomet av f av grad 2 kring 0.

(b) Använd Taylors sats för visa att om p är polynomet som du bestämt i (a) så gäller det för alla $x \geq 0$ att

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{x^3}{16}.$$

(c) Använd ditt svar på (a) för att bestämma ett approximativt värde av $\sqrt{3/2}$ och olikheten i (b) för att hitta en begränsning på felet i denna approximation.

(8p)

5. Vi har ombetts att konstruera en rektangulär låda. Lådan ska ha en kvadratisk botten, inte ha något lock samt ha en volym på 256 cm^3 . Hur ska vi välja måtten på denna låda för att minimera åtgången av material, det vill säga så att den totala arean av lådans fyra sidor och dess botten är så liten som möjligt?

(6p)

6. Skriv det komplexa talet

$$\left(\frac{2i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{15}$$

på rektangulär form, d.v.s. som $a + ib$ där $a, b \in \mathbb{R}$.

(4p)

7. Hitta lösningarna till begynnelsevärdesproblemen

(a) $y'(x)e^{y(x)} = x$ med $y(0) = 1$,

(b) $y''(x) + y(x) = e^x$ med $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$.

(6p)

8. En behållare läcker vatten med hastigheten $15 \text{ cm}^3/\text{s}$. Tvärsnittsarean av behållaren vid höjden $h \text{ cm}$, mätt från behållarens botten, ges av $A(h) = e^{\pi h} \text{ cm}^2$. Vid tidpunkten då behållaren börjar läcka befann sig vattenytan 10 cm ovan behållarens botten. Hur lång tid har passerat när allt vatten läckt ut?

(6p)

Lycka till!
Simon