

Lösningsskiss tentamen 2025-05-31.

1 a) då $-1 \leq \cos(s) \leq 1$ för alla $s \in \mathbb{R}$ har vi att

$$-|\sin(x)| \leq \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq |\sin(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Då vi vet att $x \mapsto |\sin(x)|$ är en kontinuerlig funktion med $|\sin(0)| = 0$ så följer vi enligt insättningsatsen att

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} -|\sin(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x \rightarrow 0} |\sin(x)| = 0.$$

Vilket medför att $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

b) Vi använder partiell integration:

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln(x) dx &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C. \end{aligned}$$

Svar: Alla primitiva funktioner till f ges av

$$x \mapsto \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C.$$

c) Vi utför partialbråks uppdelning.

Nämnummern har de tre reella nollställena $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$.
Vi noterar att alla nollställena är utanför integrationsintervallet $[0, 2]$,
så integralen är väldeterminerad.

Vi vill således hitta tal $A, B, C \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Om vi förlänger båda sidor med $(x+1)(x+2)(x+3)$ finner vi

$$1 = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2).$$

Genom att sätta $x = -1$ har vi att

$$1 = 2A \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2}.$$

Genom att sätta $x = -2$ har vi att

$$1 = -B \quad \Leftrightarrow \quad B = -1.$$

Genom att sätta $x = -3$ har vi att

$$1 = 2C \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{2}.$$

Vi har alltså att

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2(x+3)}$$

och således är

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^2 \frac{1}{x+2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{x+3} dx \\ &= \frac{1}{2} [\ln|x+1|]_0^2 - [\ln|x+2|]_0^2 + \frac{1}{2} [\ln|x+3|]_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \ln(3) - \ln(4) + \ln(2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \ln(5) - \frac{1}{2} \ln(3) \\
&= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right).
\end{aligned}$$

Svar: $\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right).$

d) Linjäriseringen av en funktion h kring a ges

av $L(x) = h(a) + h'(a)(x-a).$

Så för att bestämma linjäriseringen kring π behöver vi beräkna $h(\pi)$, $h'(\pi)$.

$$h(\pi) = \sqrt{1 + \sin(\pi)} = \sqrt{1} = 1.$$

Enligt kedjeregeln är

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\sin(x)}} \cos(x)$$

$$\text{Så } h'(\pi) = \frac{1}{2\sqrt{1+\sin(\pi)}} \cos(\pi) = -\frac{1}{2}.$$

Vi finner alltså att linjäriseringen av h kring π

ges av $L(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - \pi).$

2 a) Vi önskar lösa ODEn $y'' + 4y' + 4y = 4x^2$.

Detta är en inhomogen linjär ODE av ordning 2 med konstanta koefficienter. För att lösa den använder vi resultatet från kursen som säger att om y_p är en lösning till ODEn då kan varje lösning y skrivas som

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

där y_h löser den homogena ekvationen

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Vi börjar med att hitta alla lösningar till den homogena ekvationen. Dess karakteristiska ekvation är

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \text{ som har en dubbelrot}$$

$$; r = -2 \text{ då } r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2.$$

Således vet vi från en xth i kursen att den allmänna lösningen till $y'' + 4y' + 4y = 0$ ges av

$$y_h(x) = (A + Bx)e^{-2x} \text{ med } A, B \in \mathbb{R}.$$

För att hitta en lösning y_p till

$$y'' + 4y' + 4y = 4x^2$$

gör vi en ansats på formen $y_p(x) = Cx^2 + Dx + E$ och stoppar in detta i vänsterledet vilket ger

$$(Cx^2 + Dx + E)'' + 4(Cx^2 + Dx + E)' + 4(Cx^2 + Dx + E)$$

$$= (2C) + 4(2Cx + D) + 4(Cx^2 + Dx + E)$$

$$= 4Cx^2 + 4(2C + D)x + 2C + 4D + 4E.$$

För att detta ska matcha högerledet måste C, D, E lösa det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4C = 4 \\ 4(2C + D) = 0 \\ 2C + 4D + 4E = 0. \end{cases}$$

Från den första ekvationen finner vi att $C=1$.

Således blir den andra ekvationen $4(2+D)=0$
vilket ger att $D=-2$.

Så slutligen blir då den tredje ekvationen

$$2-8+4E=0 \Leftrightarrow E=\frac{3}{2}.$$

Vi hittar alltså en lösning $y_p(x)=x^2-2x+\frac{3}{2}$.

Alla lösningar ges således av

$$y(x)=x^2-2x+\frac{3}{2}+(A+Bx)e^{-2x} \quad \text{för } A, B \in \mathbb{R}.$$

b) Vi söker lösa ODEn $y'(x)+\sin(x)y(x)=\pi\sin(x)$.
Detta är en linjär ODE av ordning 1, så vi kan lösa den med hjälp av metod av integrerande faktor.

Da $-\cos(x)$ är en primitiv funktion till $\sin(x)$
och $e^{-\cos(x)} \neq 0$ för alla x är ekvationen
ekvivalent med att

$$(e^{-\cos(x)}y(x))' = e^{-\cos(x)}(y'(x)+\sin(x)y(x)) = \pi e^{-\cos(x)}\sin(x)$$

Genom att integrera båda sidor av denna ekvation har vi
att

$$\begin{aligned} e^{-\cos(x)}y(x) &= \int \pi e^{-\cos(x)}\sin(x) dx \\ &= \pi e^{-\cos(x)} + C \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \pi + Ce^{\cos(x)} \quad \text{för något } C \in \mathbb{R}.$$

Svar: Lösningarna ges av $y(x)=\pi + Ce^{\cos(x)}$ för $C \in \mathbb{R}$.

3. Vi skriver $\frac{a+i}{\pi-i}$ på rektangulär form genom att förlänga med komplex konjugatet av nämnaren:

$$\frac{a+i}{\pi-i} = \frac{(a+i)(\pi+i)}{(\pi-i)(\pi+i)} = \frac{a\pi + i\pi + ia + i^2}{\pi^2 - i\pi + i\pi - i^2} = \frac{(a\pi-1) + i(a+\pi)}{\pi^2+1}$$

$$= \frac{a\pi-1}{\pi^2+1} + i \frac{a+\pi}{\pi^2+1}.$$

Det vill säga $\operatorname{Re}\left(\frac{a+i}{\pi-i}\right) = \frac{a\pi-1}{\pi^2+1}$ och $\operatorname{Im}\left(\frac{a+i}{\pi-i}\right) = \frac{a+\pi}{\pi^2+1}.$

Vi söker alltså $a \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\frac{a\pi-1}{\pi^2+1} = \frac{a+\pi}{\pi^2+1} \iff a\pi-1 = a+\pi$$

$$\iff a = \frac{\pi+1}{\pi-1}.$$

Svar: $a = \frac{\pi+1}{\pi-1}.$

4.

funktionen $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{2} \sin(x) + \cos(x)^2$

är som en summa och produkt av de godtyckligt många gånger deriverbara funktionerna $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$. Således är funktionen f kontinuerlig på $[0, 2\pi]$ och godtyckligt många gånger deriverbar på $(0, 2\pi)$.

a) för att finne de intervall där f är växande / avtagande kan vi således studera tecknet av f' som ges av

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2} \cos(x) - 2 \cos(x) \sin(x) \\ &= 2 \cos(x) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin(x) \right). \end{aligned}$$

I punkter där f' växlar tecken måste $f'(x) = 0$ vilket enkelt sker i punkter där antingen $\cos(x) = 0$ eller $\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin(x) = 0$.

$$\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

vilket på intervallet $[0, 2\pi]$ ger oss de två punkterna $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin(x) = 0 \iff \sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{eller } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

på vårt intervall $[0, 2\pi]$ ger detta oss

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ och } x = \frac{3\pi}{4}.$$

Vi har alltså totalt 4 punkter där f' är 0:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \text{ och } \frac{3\pi}{2}.$$

Genom att betrakta enhetscirkeln ser vi att för $x \in [0, 2\pi]$

$$\cos(x) > 0 \iff x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$$

$$\sin(x) > \frac{1}{\sqrt{2}} \iff x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}).$$

Detta ger oss tecken tabellen

	$0 < x < \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$	$x = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
f'	+	0	-	0	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Eftersom vi argumenterade att f är kontinuerlig

på $[0, 2\pi]$ finner vi att:

Svar: f är växande på de tre intervallen
 $[0, \frac{\pi}{4}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$ och $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

och avtagande på intervallen

$[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ och $[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$.

b) Enligt tecken tabellen ovan har vi lokala

maximum i $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$ och $x = 2\pi$

och lokala minimum i $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ och $x = \frac{3\pi}{2}$.

Värden i dessa punkter ges av:

$$f(0) = \sqrt{2} \sin(0) + \cos(0)^2 = 1$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4})^2 = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{3}{2}$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2})^2 = \sqrt{2} \cdot 1 + 0^2 = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 = \sqrt{2} \cdot (-1) + (0)^2 = -\sqrt{2}$$

$$f(2\pi) = \sqrt{2} \sin(2\pi) + \cos(2\pi)^2 = \sqrt{2} \cdot 0 + 1^2 = 1.$$

Vi har således ett

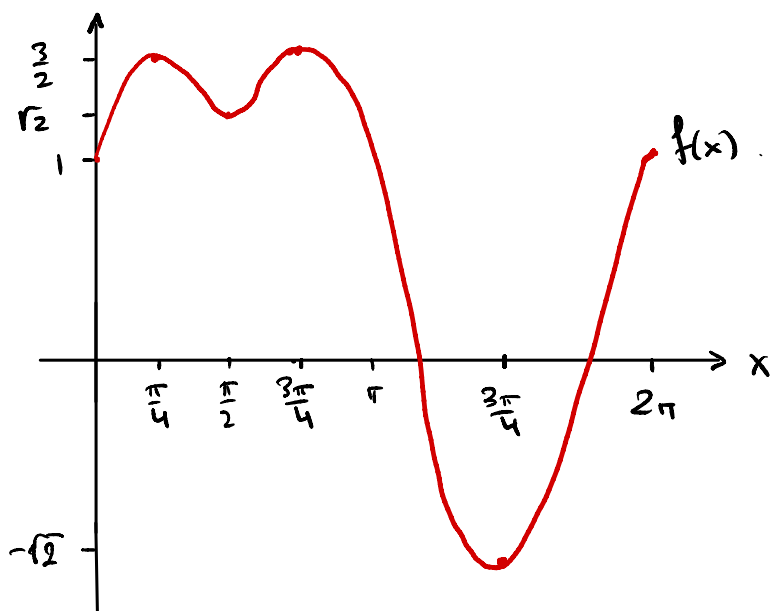
Svar: • Ett globalt minimum finns i $x = \frac{3\pi}{2}$
där funktionens värde är $-\sqrt{2}$

• Globala maximum återfinns i $x = \frac{\pi}{4}$ och $x = \frac{5\pi}{4}$
där funktionens värde är $\frac{3}{2}$.

• Utöver de globala minimumen finns det lokala
minimum i $x = 0$ och $x = \frac{\pi}{2}$
där funktionens värden ges av $f(0) = 1$
och $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$

• Utöver de globala maximumen finns det ett lokalt
maximum i $x = 2\pi$
där funktionens värde är 1.

c) Enligt det vi observerat i (a) och (b)
ser funktionsgrafen ut ungefär som



5 a) $D_{\mathbb{R}}^2 \quad f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x \ln(\pi x)}$ är en

kontinuerlig funktion så är f integrerbar på varje intervall $[1, R]$ för $R > 1$.

Således är den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln(\pi x)} dx$ konvergent enligt definitionen om och endast om gränsvärdet

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x \ln(\pi x)} dx \text{ existerar.}$$

Gör en variabelbytet $\ln(\pi x) = u$ finner vi att

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{1}{x \ln(\pi x)} dx &= \int_{\ln(\pi)}^{\ln(\pi R)} \frac{1}{u} du \\ &= [\ln(u)]_{\ln(\pi)}^{\ln(\pi R)} \\ &= \ln(\ln(\pi R)) - \ln(\pi) \end{aligned}$$

så finner vi då $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$ att

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x \ln(\pi x)} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln(\ln(R)) - \ln(\pi)) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Så integralen är divergent

Svar: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln(\pi x)} dx$ är divergent.

b) Cauchys integralkriterium säger att om
 $f: [m, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ är avtagande så är
 $\int_m^{\infty} f(x) dx$ konvergent om och endast om
 $\sum_{j=m}^{\infty} f(j)$ är konvergent.

För $f(x) = \frac{1}{x \ln(\pi x)}$ har vi att

$$f'(x) = - \frac{1 + \ln(\pi x)}{x^2 \ln(\pi x)} < 0 \quad \forall x \in [1, \infty)$$

så f är avtagande.

Da vi vidare i (a) att $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln(\pi x)} dx$ är

divergent medför Cauchys integralkriterium att

serien $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j \ln(\pi j)}$ är divergent.

6. a) då funktionen $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig
så gäller det för varje $x \in \mathbb{R}$ att

$$\lim_{y \rightarrow x} h(y) = h(x).$$

Speciellt har vi att $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0)$.

Så för att bestämma $h(0)$ beräknar vi gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}.$$

För att göra detta använder vi Taylors sat.
De g är en elementär kombination av de godtyckligt
många gånger deriverbara funktionerna $x \mapsto \arctan(x)$
och $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ är även g godtyckligt många

gånger deriverbar.

Vi har således från Taylors sat att

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + o(x^2) \quad \text{när } x \rightarrow 0.$$

$$\text{Vi har } g(0) = \arctan(0) + \frac{0}{1+0^2} = 0.$$

$$\text{och } g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 + 1+x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{så } g'(0) = 2.$$

Vi finner att

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + 2x + o(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + o(x)) = 2.$$

Svar: $h(0) = 2.$

b) Vi använder återigen Taylors sats som ger att

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(0)}{6}x^3 + O(x^4).$$

Från (a) vet vi att $g(0) = 0$, $g'(0) = 2$

$$\text{och } g'(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

Vi beräknar

$$g''(x) = \frac{-4}{(1+x^2)^3} \cdot 2x = -\frac{8x}{(1+x^2)^3}$$

$$\text{och } g'''(x) = -\frac{8}{(1+x^2)^3} + \frac{3 \cdot 8x}{(1+x^2)^4} \cdot 2x$$

$$= -\frac{8}{(1+x^2)^3} + \frac{48x^2}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{-8(1+x^2) + 48x^2}{(1+x^2)^4} = -\frac{8(1-5x^2)}{(1+x^2)^4}.$$

Således är $g''(0) = 0$ och $g'''(0) = -8$.

För gränsvärdet i uppgiften har vi alltså att

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + ax + bx^2}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+ax) + bx^2 - \frac{4}{3}x^3 + O(x^4)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+a}{x^2} + \frac{b}{x} - \frac{4}{3} + O(x) \right). \end{aligned}$$

Genom att välja $a = -2$ och $b = 0$ försvinner de två första termerna och gränsvärdet existerar och

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 2x}{x^3} = -\frac{4}{3}.$$

Svar: $a = -2$ och $b = 0$.

(För alla andra val av a, b existerar inte gränsvärdet)

7. Då f, g båda är deriverbara i $x=0$ och uppfyller att $f(0)=g(0)=0$ har vi från derivatans definition att

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \quad \text{och}$$

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - \overbrace{g(0)}^{=0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h}.$$

Enligt räknereglerne för gränsvärden vet vi att om

$$\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = A_0 \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} B(x) = B_0 \quad \text{med} \quad B_0 \neq 0$$

$$\text{då gäller det att} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_0}{B_0}.$$

Genom att skriva

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)}{\left(\frac{g(x)}{x}\right)}$$

finner vi där för att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)}{\left(\frac{g(x)}{x}\right)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

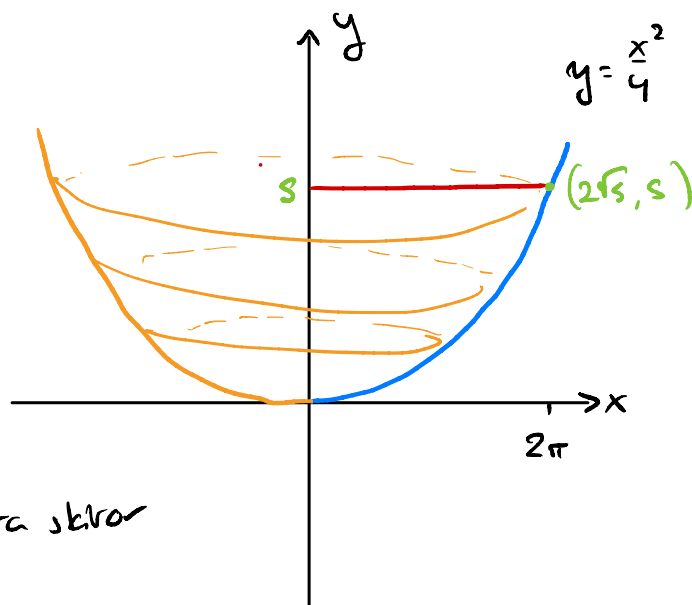
där vi använder räkneregeln ovan samt att vi visat att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = g'(0) \neq 0.$$

Vi har således bevisat påståendet i uppgiften. $\square$

8. I figuren till höger syns en skiss över skålens form.

Volymen av de kroppar vi vill beräkna i uppgiften kan beräknas på olika vis, till exempel som rotationsvolym kring y-axeln genom skivning i tunna band eller genom att skiva i cirkulära skivor ortogonala mot y-axeln.



Här väljer jag att göra det senare av de två val.

Volymen av den del av skålen som ligger högre än h cm ovanför botten ges av

$$V(h) = \int_0^h \pi (2\sqrt{s})^2 ds = 4\pi \int_0^h s ds = 2\pi h^2 \text{ cm}^3$$

detta fås genom att skiva i cirkulära skivor där skivan i höjd s cm har radien $2\sqrt{s}$ cm och således area

$$\pi (2\sqrt{s})^2 = 4\pi s \text{ cm}^2.$$

a) Enligt beräkningen ovan ges volymen av vattnet

$$\text{av } V(5) = 2\pi(5)^2 = 50\pi \text{ cm}^3.$$

b) Låt $h(t)$ vara vattenytans höjd vid tid t sekunder efter att skålen började fyllas.
Vi vill bestämma $h'(t)$ i den tid t_0 sedan
att $h(t_0) = 5$ cm.

Vi vet att volymen av vattnet ökar med
 $10 \text{ cm}^3/\text{s}$, d.v.s att

$t \mapsto V(h(t))$ har derivata konstant lika
med 10.

Med hjälp av kedjeregeln har vi att

$$\begin{aligned} (V(h(t)))' &= V'(h(t)) h'(t) \\ &= 4\pi h(t) h'(t). \end{aligned}$$

Så vid tiden t_0 då $h(t_0) = 5$ finner vi att

$$\begin{aligned} 10 &= 4\pi h(t_0) h'(t_0) = 4\pi \cdot 5 \cdot h'(t_0) \\ &= 20\pi h'(t_0) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow h'(t_0) = \frac{1}{2\pi} \text{ cm/s}.$$

Svar: Vid det tillfälle då ytan når höjden
5 cm ovan botten ökar vattenytans höjd
med $\frac{1}{2\pi} \text{ cm/s}$.