

Tentamen

Chalmers tekniska högskola & Göteborgs universitet

Matematisk analys TMV170/MVE045/MMGD31/MMGD30

2025-05-31, 08.30–12.30

Examinator: Simon Larson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Simon Larson, telefon: 031-772 28 89

Hjälpmedel: Inga

Totalt kan man få 50 poäng.

TMV170/MVE045/MMGD31 För betyget 3 krävs minst 20 poäng. För betyg 4 eller 5 krävs 30 resp. 40 poäng.

MMGD30: För betyget G krävs minst 20 poäng. För betyget VG krävs 36 poäng.

Skriv personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* blad.

Behandla endast en uppgift per blad (deluppgifter på samma blad är dock ok). Sortera och numrera dina blad innan du lämnar in. Motivera alla dina svar väl och renskriv dina lösningar. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. Använd inte röd penna.

1. (a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

- (b) Bestäm alla primitiva funktioner till $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln(x)$.

- (c) Beräkna integralen

$$\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx.$$

- (d) Bestäm linjäriseringen av funktionen $h(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$ kring punkten $x = \pi$. (8p)

2. Hitta alla lösningar till differentialekvationerna

(a) $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 4x^2$,

(b) $y'(x) + \sin(x)y(x) = \pi \sin(x)$. (6p)

3. För vilket eller vilka reella tal a gäller det att realdelen och imaginärdelen av det komplexa talet

$$\frac{a+i}{\pi-i}$$

är lika med varandra, d.v.s. för vilket eller vilka $a \in \mathbb{R}$ är $\operatorname{Re}\left(\frac{a+i}{\pi-i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{a+i}{\pi-i}\right)$. (4p)

4. Låt $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ges av

$$f(x) = \sqrt{2} \sin(x) + \cos(x)^2.$$

- (a) Bestäm de intervall där f är växande respektive avtagande.

- (b) Avgör om f har några lokala eller globala extremvärden. Bestäm i så fall dessa värden och vart de antas.

- (c) Använd dina svar i (a) och (b) för att skissa funktionsgrafen till f . (8p)

VÄND!

5. (a) Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln(\pi x)} dx$$

är konvergent eller divergent. Om integralen är konvergent beräkna dess värde.

- (b) Använd Cauchys integralkriterium för att avgöra om serien

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j \ln(\pi j)}$$

är konvergent eller divergent.

(6p)

6. Låt $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieras av $g(x) = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}$.

- (a) En funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig och ges för $x \neq 0$ av

$$h(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

Vad är $h(0)$?

- (b) Hitta $a, b \in \mathbb{R}$ sådana att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + ax + bx^2}{x^3}$$

existerar.

(6p)

7. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktioner som är deriverbara i 0 med $f(0) = 0, g(0) = 0$ och $g'(0) \neq 0$. Använd derivatans definition tillsammans med räkneregler för gränsvärden för att visa att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

Obs: Påståendet är likt, men är inte en konsekvens av, l'Hôpitals regler som diskuterats under kursen.

(6p)

8. Betrakta den skål som bildas när kurvan $y = x^2/4$ för $0 \leq x \leq 2\pi$ roteras kring y -axeln med enheterna på koordinataxlarna angivna i cm.

- (a) Om skålen innehåller vatten och vattenytan befinner sig 5 cm ovanför skålens botten, hur stor volym vatten innehåller då skålen?

- (b) Om skålen fylls med vatten med hastigheten $10 \text{ cm}^3/\text{s}$, hur snabbt förändras vattenytans höjd vid det tillfälle då vattenytan når 5 cm ovanför skålens botten?

(6p)

Lycka till!
Simon