

$$1 a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \arctan(x) + x \sin(x)}{x^2 + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x) + \frac{\sin(x)}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Då vi vet att $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

och att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$

på grund av måttingsfaktorn så följer det från
räkner regler för gränsvärden att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \arctan(x) + x \sin(x)}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\arctan(x)}^{\rightarrow \frac{\pi}{2}} + \overbrace{\frac{\sin(x)}{x}}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{1}_{\rightarrow 1} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\rightarrow 0}} = \frac{\pi}{2}$$

Svar: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \arctan(x) + x \sin(x)}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$

b) Då $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$, $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{x}$
och $r: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) = \ln(x)$ är deriverbara funktioner
följer det från kedjeregeln att
 $f(x) = e^{\sqrt{\ln(x)}} = g(h(r(x)))$ är deriverbar på
sin naturliga definitionsmängd som ges av

$$\begin{aligned}
 D_f &= \{x \in D_r : r(x) \in D_h \text{ och } h(r(x)) \in D_g\} \\
 &= \{x \in (0, \infty) : \underbrace{\ln(x) \in (0, \infty)}_{\text{satt om } x > 1}, \underbrace{\sqrt{\ln(x)} \in \mathbb{R}}_{\text{alltid ok om } \ln(x) \geq 0}\} \\
 &= (1, \infty)
 \end{aligned}$$

vilket summerar till med definitionsmängden vi fick ovan.

Kedjeregeln ger oss således att

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= g'(h(r(x))) h'(r(x)) r'(x) \\
 &= e^{\sqrt{\ln(x)}} \frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{\sqrt{\ln(x)}}}{2x\sqrt{\ln(x)}}
 \end{aligned}$$

Svar: $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{\ln(x)}}}{2x\sqrt{\ln(x)}}$

c) Härmed partiell integration finner vi att

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \frac{x}{e^x} dx &= \left[-\frac{x}{e^x} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 1 \cdot \left(-\frac{1}{e^x} \right) dx \\
 &= \left[-\frac{x}{e^x} \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{1}{e^x} dx \\
 &= \left[-\frac{x}{e^x} \right]_{-1}^1 - \left[\frac{1}{e^x} \right]_{-1}^1 \\
 &= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e^{-1}} - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^{-1}} = -\frac{2}{e}
 \end{aligned}$$

Svar $\int_{-1}^1 \frac{x}{e^x} dx = -\frac{2}{e}$

d) Vi vill bestämma den indefinita integralen $\int \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx$.

Gör om att göra variabelbytet $y = \ln(1+x)$,
vilket motsvarar att $e^y = 1+x$ och således $dx = e^y dy$,
finns vi att

$$\int \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx = \int \frac{y}{e^y} e^y dy = \int y dy = \frac{y^2}{2} + C = \frac{\ln(1+x)^2}{2} + C.$$

Svar: Samtliga primitiva funktioner till f är på formen

$$\frac{\ln(1+x)^2}{2} + C \quad \text{för någon konstant } C \in \mathbb{R}.$$

2. a) För varje $x \in \mathbb{R}$ där $y(x) \neq -2$ är ekvationen
ekvivalent med att

$$\frac{4y'(x)}{(2+y(x))^2} = \cos(x)$$

Om $G(x) = -\frac{4}{2+x}$ gäller det att $G'(x) = \frac{4}{(2+x)^2}$

och vi kan alltså skriva ekvationen som

$$G'(y(x))y'(x) = \cos(x).$$

Vilket från kedjeregeln är detsamma som att

$$(G(y(x)))' = \cos(x).$$

Om vi integrerar båda sidor finner vi att

$$G(y(x)) = \sin(x) + C \quad \text{för något } C \in \mathbb{R}.$$

d.v.s.
$$-\frac{4}{2+y(x)} = \sin(x) + C.$$

Om vi sätter in $x=0$ och använder att $y(0)=0$
finner vi att C uppfyller

$$-\frac{4}{2+0} = \sin(0) + C$$

$$\Leftrightarrow -2 = C.$$

Så y uppfyller att

$$-\frac{4}{2+y(x)} = \sin(x) - 2$$

för x sådana att $y(x) \neq -2$ ger detta att $y(x) = \frac{2\sin(x)}{2 - \sin(x)}$

För att verifiera att $y(x) = \frac{2\sin(x)}{2-\sin(x)}$ är en lösning för alla $x \in \mathbb{R}$ kan man antingen

- ① beräkna y' och verifiera att ekvationen $4y'(x) = (2+y(x))^2 \cos(x)$ är uppfylld, eller
- ② verifiera att $\frac{2\sin(x)}{2-\sin(x)} \neq -2$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Alternativ ①: Om $y(x) = \frac{2\sin(x)}{2-\sin(x)}$

$$4y'(x) = 4 \left(\frac{2\sin(x)}{2-\sin(x)} \right)' = 4 \frac{2\cos(x)(2-\sin(x)) + 2\sin(x)\cos(x)}{(2-\sin(x))^2}$$
$$= \frac{16\cos(x)}{(2-\sin(x))^2}$$

$$\text{och } (2+y(x))^2 \cos(x) = \left(2 + \frac{2\sin(x)}{2-\sin(x)} \right)^2 \cos(x)$$
$$= \left(\frac{4 - 2\sin(x) + 2\sin(x)}{2-\sin(x)} \right)^2 \cos(x)$$
$$= \frac{16\cos(x)}{(2-\sin(x))^2}$$

Så vi har att y löser ODE:n som önskat.

Alternativ ② $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(s) = \frac{2s}{2-s}$ har derivatan

$$g'(s) = \frac{2(2-s) + 2s}{(2-s)^2} = \frac{4}{(2-s)^2} > 0 \quad \text{så } g \text{ är}$$

växande och uppfyller därav att $g(s) \geq g(-1) = -\frac{2}{3}$

för alla $s \in [-1, 1]$. Då $y(x) = g(\sin(x))$ har vi funnit att $y(x) > -2$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Svar: $y(x) = \frac{2\sin(x)}{2 - \sin(x)}$

b) ODEn är en homogen linjär ODE av andra ordningen med konstanta koefficienter, vi finner den allmänna lösningen genom att lösa motsvarande karakteristiska ekvation: $r^2 - 2r + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (r-1)^2 = 0$$

vi har en dubbelrot i $r=1$.

Det ger oss att y har formen

$$y(x) = (A+Bx)e^x \quad \text{för något val av konstanter.}$$

$$A, B \in \mathbb{R}$$

Villkoren $y(0)=0$ och $y'(0)=1$ ger att

$$y(0) = A$$

$$y'(x) = (A+Bx)e^x + Be^x \Rightarrow y'(0) = A+B$$

så vi har ekvationssystemet
$$\begin{cases} A = 0 \\ A+B = 1 \end{cases}$$

vilket har lösningen $A=0, B=1$.

Svar: $y(x) = xe^x$

3. a) Enligt definitionen ges det sökta Taylorpolynomet av

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2.$$

Vi behöver alltså beräkna $f(0)$, $f'(0)$ och $f''(0)$. Då

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 + \sin(x)^2 - \cos(x)^2$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x - 2 + 2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)\sin(x) \\ &= 6x - 2 + 4\sin(x)\cos(x), \end{aligned}$$

finner vi att

$$f(0) = 0^3 - 0^2 + 0 - \underbrace{\cos(0)}_{=1} \underbrace{\sin(0)}_{=0} = 0$$

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 + \underbrace{\sin(0)^2}_{=0} - \underbrace{\cos(0)^2}_{=1} = 1 - 1 = 0.$$

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 2 + 4 \underbrace{\sin(0)}_{=0} \underbrace{\cos(0)}_{=1} = -2.$$

Alltså har vi

$$P(x) = 0 + 0 \cdot x - \frac{2}{2!}x^2 = -x^2.$$

b) Enligt Taylorsats så finns det för varje $x > 0$ ett $\alpha \in (0, x)$ sådant att

$$f(x) = P(x) + \frac{f'''(\alpha)}{3!}x^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - P(x)}{x^3} = \frac{f'''(\alpha)}{6}. \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Då} \quad f'''(x) &= 6 - 4\sin(x)^2 + 4\cos(x)^2 \\ &= 6 - 4(1 - \cos(x)^2) + 4\cos(x)^2 \\ &= 2 + 8\cos(x)^2 \end{aligned}$$

Så här vi att $\forall \alpha > 0$ gäller det att
eftersom $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$
 $2 \leq f'''(\alpha) \leq 2+8=10$

Så

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \frac{f'''(\alpha)}{6} \leq \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \quad \forall \alpha > 0$$

vilket från (*) ger

$$\frac{1}{3} \leq \frac{f(x) - P(x)}{x^3} \leq \frac{5}{3}$$

för alla $x > 0$.

4. Låt z lös $(z+i)^6 = -1$ då löser $w = z+i$ ekvationen $w^6 = -1$.

Om w löser denna ekvationen och skrivs som $w = re^{i\theta}$ på polar form så har vi att

$$w^6 = r^6 e^{i6\theta} = -1$$

i termer av r, θ ger detta
$$\begin{cases} r^6 = 1 \\ 6\theta = \pi + 2k\pi \quad \text{för något } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Med andra ord $r=1$ och $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$.

Vi finner att det finns 6st olika lösningar. På rektangulär form har vi lösningarna

$$\begin{aligned} k=0: \quad w_0 &= e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ k=1: \quad w_1 &= e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ k=2: \quad w_2 &= e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ k=3: \quad w_3 &= e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \\ k=4: \quad w_4 &= e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \\ k=5: \quad w_5 &= e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \end{aligned}$$

Eftersom $w = z+i \iff z = w-i$ ger detta oss

de sex lösningarna:

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$$

$$z_4 = -2i$$

$$z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$$

5. a) Då f är en kvot av två elementära funktioner som vi vet är definierade på hela $\mathbb{R}$ är den naturliga definitionsmängden för f de x där nämnaren i kvoten är skild från 0. Med andra ord

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : xe^x \neq 0\} \\ = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Svar: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Då $x \mapsto x-1$ och $x \mapsto xe^x$ båda är elementära funktioner som vi vet är kontinuerliga och deriverbara på hela $\mathbb{R}$ så säger kvotregeln att f är deriverbar och således kontinuerlig i alla punkter där kvoten är definierad, d.v.s på hela definitionsmängden $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Svar: f är kontinuerlig och deriverbar på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Kvotregeln och produktregeln ger oss att

$$f'(x) = \frac{xe^x - (x-1)(e^x + xe^x)}{(xe^x)^2}$$

$$= \frac{e^x - x^2e^x + xe^x}{(xe^x)^2}$$

$$= - \frac{x^2 - x - 1}{x^2e^x}.$$

Då $x^2e^x > 0$ för $x \neq 0$ finner vi alla nollställen till f' där $x^2 - x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Vi noterar att polynomet $x^2 - x - 1$ är större än noll
 om $x < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ eller $x > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$
 och negativt i intervallet $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$.

För f' har vi alltså tecken tabellen

	$x < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$	$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$	$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$	$x > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$
f'	-	0	+	ej def.	+	0	-
f	↘	lokalt minimum	↗	ej def.	↗	lokalt maximum	↘

Vi har alltså lokalt minimum i $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ där vi har värdet

$$f\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - 1}{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

och ett lokalt maximum i $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ där vi har värdet

$$f\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} e^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

Di $\lim_{x \rightarrow 0} x e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = -1$

och $x e^x > 0$ för $x > 0$ och $x e^x < 0$ för $x < 0$

har vi att

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$$

Således har vi inga globala maximum eller minimum.

Svar: f saknar globala extremvärden, har ett lokalt maximum på $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ i $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

och ett lokalt minimum på $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} e^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

d) Vi har i c) redan visat att

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$$

så $x=0$ är en vertikal asymptot.

Da f är kontinuerlig på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ så kan det inte finnas fler vertikala asymptoter.

Det återstår att undersöka om det finns sneda/horisontella asymptoter mot $+\infty$ respektive $-\infty$.

Mot $+\infty$: Om $y=kx+m$ är en snedasymptot mot $+\infty$ kan k finnas genom gränsvärdet

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2 e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{x e^x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{da } 1 - \frac{1}{x} \rightarrow 1$$

$$\text{och } x e^x \rightarrow \infty \quad \text{da } x \rightarrow \infty$$

Vi har alltså möjligen en horisontell asymptot da $x \rightarrow \infty$.
Om det finns en sådan kan vi hitta m värdet genom att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{e^x} = 0$$

då $1 - \frac{1}{x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow \infty$.
 och $e^x \rightarrow \infty$

Alltså har vi den horisontella asymptoten $y = 0$ mot $+\infty$.

Mot $-\infty$: Om $y = kx + m$ är en snedasymptot mot $-\infty$ kan k finnas genom gränsvärdet

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2 e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{e^{-x}}{x} = -\infty \end{aligned}$$

då $1 - \frac{1}{x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow -\infty$

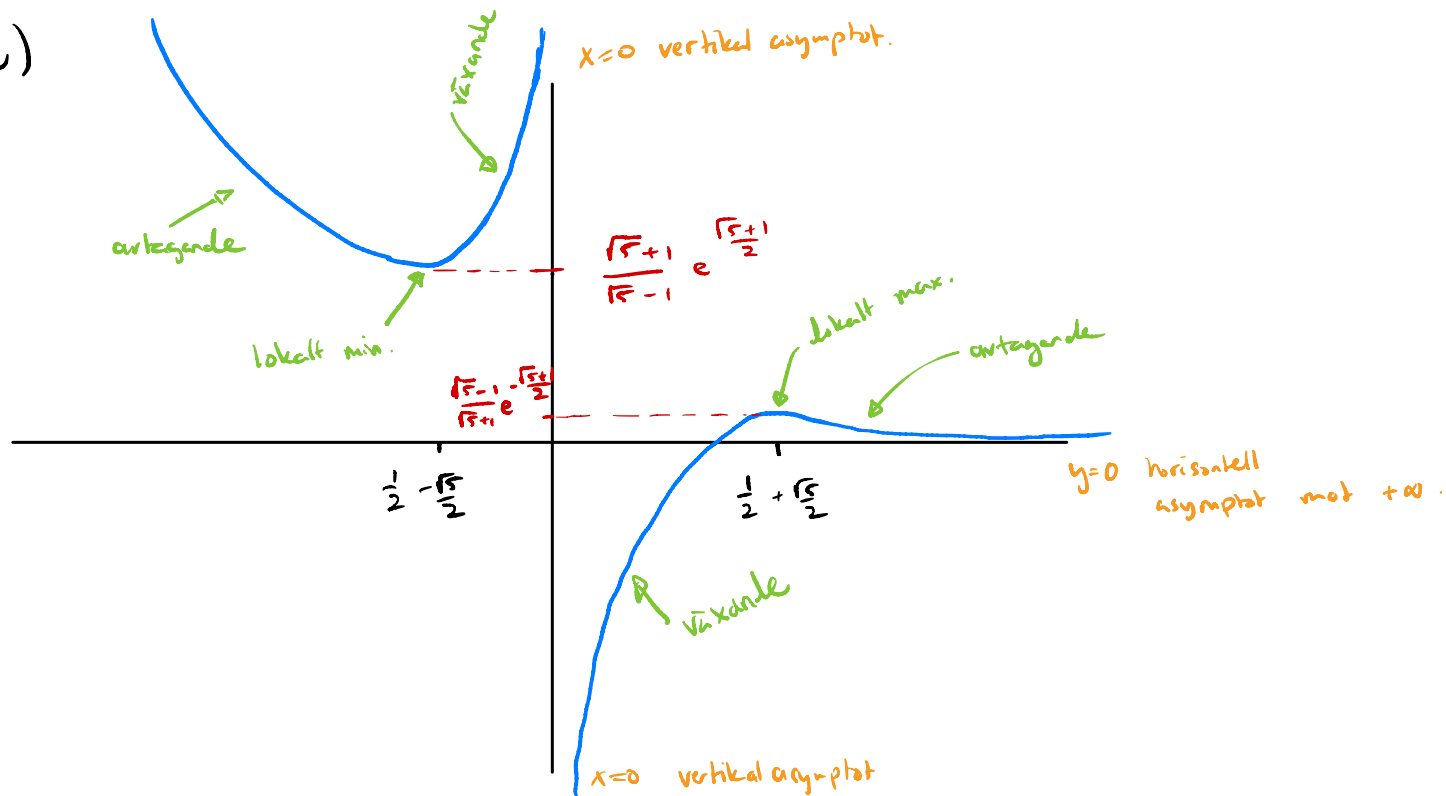
och $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y} = -\infty$

↑
Standardgränsvärde

Således finns det ingen sned eller horisontell asymptot mot $-\infty$.

Svar: Funktionsgränsen $y = f(x)$ har den vertikala asymptoten $x = 0$ och den horisontella asymptoten $y = 0$.

e)



6. Notera att då $\sin(x)^2 \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ har vi att

$$\frac{x^2 + \sin(x)^2}{x^2 + 1} < \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}.$$

Alltså är området i planet mellan de två kurvorna obegränsat i x -led.

Dess area, om den är ändlig, ges av den generaliserade

$$\begin{aligned} \text{integralen} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} - \frac{x^2 + \sin(x)^2}{x^2 + 1} \right) dx \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 - \sin(x)^2}{x^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

Då $0 \leq \frac{2 - \sin(x)^2}{x^2 + 1} \leq \frac{2}{x^2 + 1}$ kan vi använda jämförelse

kriteriet tillsammans med att

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{2}{x^2 + 1} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 \frac{2}{x^2 + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} -2 \arctan(-R) = \pi \\ \int_0^{\infty} \frac{2}{x^2 + 1} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{2}{x^2 + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} 2 \arctan(R) = \pi \end{aligned}$$

för att säga att den generaliserade integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 - \sin(x)^2}{x^2 + 1} dx \quad \text{är konvergent.}$$

Svar: Området har ändlig area.

$$\left[\text{Det är svårt men inte omöjligt att beräkna area av området exakt. Området har area } \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2e^2} \text{ area enheter.} \right]$$

7. Som det står i uppgiften behöver vi visa att det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett tal N som är tillräckligt stort att

$$\left| \frac{8n}{4n+1} - 2 \right| < \varepsilon \quad \text{för } n > N.$$

$$\text{Då} \quad \left| \frac{8n}{4n+1} - 2 \right| = \left| \frac{8n - 2(4n+1)}{4n+1} \right| = \left| \frac{-2}{4n+1} \right| = \frac{2}{4n+1}$$

$$\text{och} \quad \frac{2}{4n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\varepsilon} < 4n+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{4} < n$$

så gäller det att

$$\left| \frac{8n}{4n+1} - 2 \right| < \varepsilon \quad \text{om} \quad n > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{4}.$$

Vi har alltså visat att den önskade olikheten gäller

$$\text{för alla } n > N \quad \text{om} \quad N = \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{4}.$$

□

8. Genom implicit derivering av ekvationen

$$\sin(\pi x g(x)) + x g(x)^2 = 1$$

finer vi att

$$\cos(\pi x g(x)) (\pi g(x) + \pi x g'(x)) + g(x)^2 + 2x g(x) g'(x) = 0$$

i en omgivning av $x=1$.

Om vi sätter in $x=1$ och använder att $g(1)=1$ för
vi ekvationen

$$\cos(\pi) (\pi + \pi g'(1)) + 1^2 + 2g'(1) = 0$$

$\cos(\pi)$
 $= -1$

$$\Leftrightarrow 1 - \pi + (2 - \pi)g'(1) = 0$$

Genom att lösa ut $g'(1)$ får vi att

$$g'(1) = \frac{\pi - 1}{2 - \pi}.$$

Svar: $g'(1) = \frac{\pi - 1}{2 - \pi}.$