

Tentamen
Chalmers tekniska högskola & Göteborgs universitet
Matematisk analys TMV170/MVE045/MMGD31/MMGD30

2025-08-21, 14.00–18.00

Examinator: Simon Larson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Simon Larson, telefon: 031-772 28 89

Hjälpmedel: Inga

Totalt kan man få 50 poäng.

TMV170/MVE045/MMGD31 För betyget 3 krävs minst 20 poäng. För betyg 4 eller 5 krävs 30 resp. 40 poäng.

MMGD30: För betyget G krävs minst 20 poäng. För betyget VG krävs 36 poäng.

Skriv personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* blad.

Behandla endast en uppgift per blad (deluppgifter på samma blad är dock ok). Sortera och numrera dina blad innan du lämnar in. Motivera alla dina svar väl och renskriv dina lösningar. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. Använd inte röd penna.

1. (a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \arctan(x) + x \sin(x)}{x^2 + 1}.$$

- (b) Bestäm derivatan av $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definierad av $f(x) = e^{\sqrt{\ln(x)}}$.

- (c) Beräkna integralen

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{e^x} dx.$$

- (d) Bestäm samtliga primitiva funktioner till $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. (8p)

2. (a) Bestäm den funktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller att

$$4y'(x) = (2 + y(x))^2 \cos(x) \quad \text{och} \quad y(0) = 0.$$

- (b) Bestäm den funktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller att

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 0 \quad \text{och} \quad y'(0) = 1. \quad (6p)$$

3. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ges av

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - \cos(x) \sin(x).$$

- (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring $x = 0$.

- (b) Visa med hjälp av Taylors sats att om P är Taylorpolynomet från (a) så gäller det att

$$\frac{1}{3} \leq \frac{f(x) - P(x)}{x^3} \leq \frac{5}{3}$$

för alla $x > 0$.

(6p)

VÄND!

4. Bestäm alla komplexa tal $z \in \mathbb{C}$ som uppfyller ekvationen $(z + i)^6 = -1$. Hur många olika lösningar finns det? (4p)

5. Låt $f(x) = \frac{x-1}{xe^x}$.

- (a) Bestäm den naturliga definitionsmängden för f .
- (b) Bestäm var f är kontinuerlig och var f är deriverbar.
- (c) Avgör ifall f har några globala eller lokala extremvärden. Bestäm i så fall dessa värden och var de antas.
- (d) Bestäm alla sneda, horisontella och vertikala asymptoter till funktionsgrafen $y = f(x)$.
- (e) Använd dina svar i (a)–(d) för att skissa funktionsgrafen till f .

(8p)

6. Avgör ifall det område i planet som definieras av

$$\frac{x^2 + \sin(x)^2}{x^2 + 1} \leq y \leq \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

har ändlig area.

(6p)

7. Visa utifrån definitionen av gränsvärden att talföljden $\left\{ \frac{8n}{4n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ har gränsvärdet 2. Det vill säga, visa att för varje tal $\varepsilon > 0$ så existerar det ett tal N sådant att

$$\left| \frac{8n}{4n+1} - 2 \right| < \varepsilon \quad \text{för alla } n > N.$$

(6p)

8. Det finns en deriverbar funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller att $g(1) = 1$ och

$$\sin(\pi x g(x)) + x g(x)^2 = 1$$

för alla x i en omgivning av 1. Bestäm $g'(1)$.

(6p)

Lycka till!
Simon