

1a) Enligt Taylors gäller det att

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad \text{då } x \rightarrow 0.$$

Alltså har vi att

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \frac{x}{2} + O(x^2) - 1}{x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} + \underbrace{O(x)}_{\rightarrow 0}}{\underbrace{1 - \frac{x}{2} + O(x^2)}_{\rightarrow 0}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2},$$

där vi i sista steget använde oss av räkneregeln för gränsvärden av kvoter.

Svar: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = -\frac{1}{2}.$

b) Om

$$f(x) = \int_0^x e^{\cos(t)} dt$$

så gäller det enligt analysens huvudsats att

f är deriverbar och $f'(x) = e^{\cos(x)}$.

De $h(x) = f(x^2)$ finner vi från kedjeregeln att

$$h'(x) = f'(x^2) 2x = 2x e^{\cos(x^2)}.$$

Svar: $h'(x) = 2x e^{\cos(x^2)}.$

c) Med hjälp av variabelbytet $\sin(x) = y$ gäller det att

$$\begin{aligned}\int \cos(\sin(x)) \cos(x) dx &= \int \cos(y) dy \\ &= \sin(y) + C \\ &= \sin(\sin(x)) + C.\end{aligned}$$

Svar: $\int \cos(\sin(x)) \cos(x) dx = \sin(\sin(x)) + C.$

d) Enligt definitionen av kontinuitet så är g kontinuerlig i $x = \pi$ om och endast om

$$\lim_{x \rightarrow \pi} g(x) = g(\pi).$$

Di $g(\pi) = c$ så vill vi alltså veta c som detta gränsvärde. Enligt Taylors sats har vi att

$$\sin(x) = \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} + \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}(x-\pi) + O((x-\pi)^2) \text{ då } x \rightarrow \pi.$$

Alltså har vi att

$$\lim_{x \rightarrow \pi} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi}.$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-(x-\pi) + O((x-\pi)^2)}{x-\pi}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} -1 + O(x-\pi) = -1.$$

Svar: g är kontinuerlig i $x = \pi$ om och endast om $c = -1.$

2) För att besvara uppgiften studerar vi hur funktionen f beter sig på intervallet $[1, e^{2\pi}]$

Da logaritmen och sin både är kontinuerliga och deriverbara på hela sina definitionsmängder gäller detsamma för deras sammansättning f .

Enligt kedjeregeln har vi att

$$f'(x) = \cos(\ln(x)) \frac{1}{x}.$$

$$\text{Så } f'(x) = 0 \iff \cos(\ln(x)) = 0$$

$$\iff \ln(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = e^{\frac{\pi}{2} + k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De enda $k \in \mathbb{Z}$ med egenskapen att

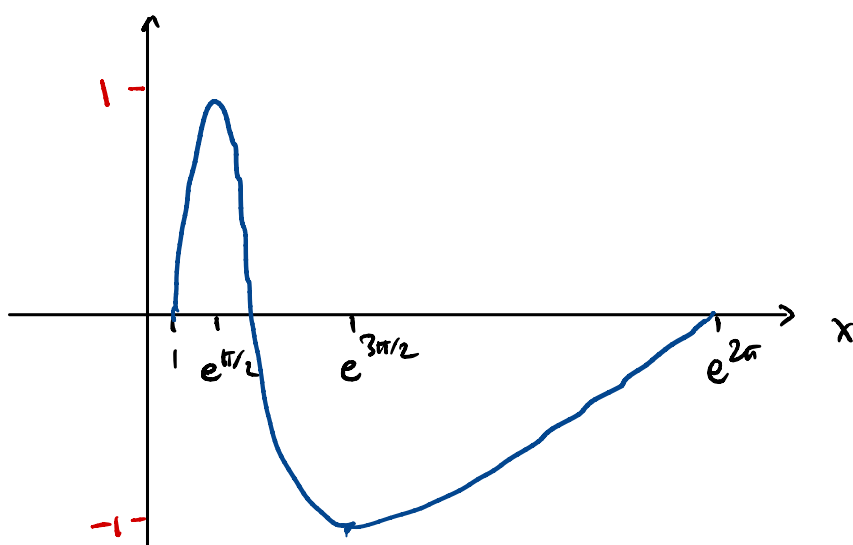
$$e^{\frac{\pi}{2} + k\pi} \in [1, e^{2\pi}] \text{ är } k=0 \text{ och } k=1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \text{ sker i } x_1 = e^{\pi/2} \text{ och } x_2 = e^{3\pi/2}.$$

Vi konstruerar en teckenstabell:

	$x=1$	$1 < x < x_1$	$x=x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x=x_2$	$x_2 < x < e^{2\pi}$	$x=e^{2\pi}$
f'		+	0	-	0	+	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

f har alltså en gråt som ser ut som



Då f är kontinuerlig och strängt monoton på de tre delintervallen $[1, e^{\pi/2}]$, $[e^{\pi/2}, e^{3\pi/2}]$ och $[e^{3\pi/2}, e^{2\pi}]$

gäller det att varje värde i

$$(f(1), f(e^{\pi/2})) , (f(e^{\pi/2}), f(e^{3\pi/2}))$$

$$\text{och } (f(e^{3\pi/2}), f(e^{2\pi}))$$

antogs precis en gång på respektive intervall.

Svar a) ekvationen saknar lösning om $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

b) exakt en lösning existerar om $a = 1$
eller $a = -1$.

c) exakt tre lösningar finns för $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

d) fler än två lösningar finns endast om $a = 0$, i vilket fall det finns tre.

3) Enligt derivatans definition är en funktion $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ deriverbar i $x \in D_g$ om och endast om

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \text{ existerar.}$$

Om så är fallet är värdet av detta gränsvärde derivatan av g i x .

För $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ har vi att om $x \in \mathbb{R}$

så är

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2.$$

Alltså existerar gränsvärdet och f är deriverbar med derivatan $f'(x) = 3x^2$.

□

4.a) Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen

$$(*) \quad y_h''(x) - y_h'(x) = 0.$$

För att lösa (*) löser vi den karakteristiska ekvationen

$$r^2 - r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r(r-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = 0, r_2 = 1.$$

Enligt en sats i kursen har vi då att lösningarna till (*)

$$\text{ges av } y_h(x) = C_1 + C_2 e^x \quad \text{för } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Om vi hittar en en lösning y_p till

$$y''(x) - y'(x) = e^x$$

se säger en sats från

kursen att varje lösning till ekvationen ges av

$$y(x) = y_p(x) + C_1 + C_2 e^x \quad \text{för } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

För att hitta en partikulärlösning y_p söker vi en lösning på formen Axe^x för något $A \in \mathbb{R}$, vi

har då att

$$(Axe^x)' = Axe^x + Ae^x$$

$$(Axe^x)'' = Axe^x + 2Ae^x.$$

Således är

$$\begin{aligned} (Axe^x)'' - (Axe^x)' &= Axe^x + 2Ae^x - (Axe^x + Ae^x) \\ &= Ae^x. \end{aligned}$$

Alltså har vi en lösning genom att välja $A=1$,

$$\text{dvs } y_p(x) = xe^x.$$

Svar: $y''(x) - y'(x) = e^x$ har lösningarna

$$y(x) = xe^x + C_1 + C_2 e^x \quad \text{för } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

b) för $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ har vi att

$$\cos(x)^2 y'(x) + y(x) = 1 \iff y'(x) + \frac{y(x)}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} \cdot (x)$$

Vi löser denna linjära första ordningens ODE med hjälp av att multiplicera med den integrerande faktorn $e^{F(x)}$

där $F(x)$ är en primitiv funktion till $\frac{1}{\cos(x)^2}$.

De $\int \frac{1}{\cos(x)^2} dx = \tan(x) + C$ kan vi ta

$$F(x) = \tan(x).$$

Vi får då att $(*)$ är ekvivalent med

$$(y(x)e^{\tan(x)})' = \frac{e^{\tan(x)}}{\cos(x)^2}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y(x)e^{\tan(x)} &= \int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos(x)^2} dx \\ &= e^{\tan(x)} + C \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = 1 + Ce^{-\tan(x)} \quad \text{för ngt. } C \in \mathbb{R}.$$

För att $y(0) = 2$ får vi att $2 = 1 + C \Leftrightarrow C = 1$.

Den sökta lösningen ges av $y(x) = 1 + e^{-\tan(x)}$.

Svar: $y(x) = 1 + e^{-\tan(x)}$.

5) Enligt räkneregler för komplexa tal har vi att

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+ib)^2}{1+i} = \frac{(1+ib)(1+ib)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1+2ib-b^2)(1-i)}{1+1} \\ &= \frac{1+2ib-b^2-i+2b+ib^2}{2} \\ &= \frac{1-b^2+2b}{2} + i \frac{2b-1+b^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Alltså är } \operatorname{Re}(z) = \frac{1-b^2+2b}{2}$$

$$\text{och } \operatorname{Re}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-b^2+2b = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2-2b-1=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)^2-1-1=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)^2=2$$

$$\Leftrightarrow b = 1 \pm \sqrt{2}$$

Svar: Realdelen av z är noll
om och endast om $b = 1 + \sqrt{2}$ eller
 $b = 1 - \sqrt{2}$.

6) Vi delar in metalltråden i n bitar motsvarande n stycken lika stora delintervall av $0 \leq x \leq 3$.

På varje av dessa delintervall approximerar densiteten med dess värde i en punkt på respektive intervall. Längden av tråden hörande till var och ett av dessa intervall kan som approximeras i kurven när vi beräknar längden av kurvor.

Detta ger oss Riemann summor som approximerar trådens massa och som i gränsen $n \rightarrow \infty$ konvergerar till integralen

$$\int_0^3 \rho(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

där $y(x) = \frac{(2+x^2)^{3/2}}{3}$ är kurvan som beskriver trådens form.

Vi vill nu beräkna integralen. Vi har att

$$\rho(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{och} \quad y'(x) = \frac{3}{2} \frac{(2+x^2)^{1/2}}{3} 2x = x(2+x^2)^{1/2}.$$

Så massan ges av

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \frac{1}{1+x^2} \sqrt{1 + x^2(2+x^2)} dx \\ &= \int_0^3 \frac{1}{1+x^2} \sqrt{\underbrace{1 + 2x^2 + x^4}_{=(1+x^2)^2}} dx \\ &= \int_0^3 \frac{1}{1+x^2} (1+x^2) dx \\ &= \int_0^3 1 dx = 3. \end{aligned}$$

Svar: Metalltråden har massan 3 gram.

7) Vi börjar med att beräkna de första fyra derivatorna av f då vi kommer behöva dessa.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$f'(t) = \frac{-1}{2(1-t^2)^{3/2}} (-2t) = \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}} - \frac{3t}{2(1-t^2)^{5/2}} (-2t) \\ &= \frac{1-t^2 + 3t^2}{(1-t^2)^{5/2}} = \frac{1+2t^2}{(1-t^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(t) &= \frac{4t}{(1-t^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1+2t^2}{(1-t^2)^{7/2}} \cdot (-2t) \\ &= \frac{4t(1-t^2) + 5(1+2t^2)t}{(1-t^2)^{7/2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{9t + 6t^3}{(1-t^2)^{7/2}}$$

$$f^{(4)}(t) = \frac{9+18t^2}{(1-t^2)^{7/2}} - \frac{7}{2} \cdot \frac{9t+6t^3}{(1-t^2)^{9/2}} (-2t)$$

$$= \frac{(9+18t^2)(1-t^2) + 7(9t+6t^3)t}{(1-t^2)^{9/2}}$$

$$= \frac{9 + 72t^2 + 24t^4}{(1-t^2)^{9/2}}$$

a) Taylorpolynom till f av grad 2 kring $t=0$ ges således av

$$p(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2} t^2$$
$$= 1 + \frac{t^2}{2}.$$

Som närmevärde för $f(1/\sqrt{2})$ får vi

$$\text{från detta } p(1/\sqrt{2}) = 1 + \frac{(1/\sqrt{2})^2}{2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Svar: närmevärdet som förs är $5/4$.

b) Enligt Taylors sats så finns det för varje $t \in (-1, 1)$ ett α mellan 0 och t sådant att

$$f(t) = p(t) + \frac{f'''(\alpha)}{3!} t^3.$$

Med $t = 1/\sqrt{2}$ har vi alltså att det finns $\alpha \in (0, 1/\sqrt{2})$ sådant att

$$f(1/\sqrt{2}) - A = \frac{f'''(\alpha)}{12\sqrt{2}}. \quad (*)$$

$$\text{Då } f'''(t) = \frac{9 + 72t^2 + 24t^4}{(1-t^2)^{9/2}} > 0$$

för alla $t \in (-1, 1)$ så är f''' en växande funktion på detta intervall.

Således har vi att för varje $x \in (0, 1/\sqrt{2})$ är

$$f'''(0) \leq f'''(x) \leq f'''(1/\sqrt{2})$$

då

$$f'''(0) = \frac{9 \cdot 0 + 6 \cdot 0^3}{(1-0^2)^{7/2}} = 0$$

och

$$f'''(1/\sqrt{2}) = \frac{9 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{7/2}} = 96$$

gäller det att

$$0 \leq f'''(x) \leq 96 \quad \text{för } \underline{\text{alla}} \quad x \in [0, 1/\sqrt{2}]$$

Därav ger (*) att

$$0 \leq f(1/\sqrt{2}) - A \leq \frac{96}{12\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

vilket var det som skulle visas.

8) då $x \mapsto \ln(x)$ är en växande funktion
 så har vi att för varje $x \in [s, \pi s]$ med $s > 1$ att

$$\frac{1}{\ln(s) + \ln(\pi)} = \frac{1}{\ln(\pi s)} \leq \frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(s)}.$$

Enligt räkneregler för integraler gäller det därför
 för varje $s > 1$ att

$$\int_s^{\pi s} \frac{x}{\ln(x)} dx \leq \frac{1}{\ln(s)} \int_s^{\pi s} x dx = \frac{1}{\ln(s)} \left[\frac{x^2}{2} \right]_s^{\pi s} = \frac{(\pi^2 - 1)s^2}{2 \ln(s)}$$

och

$$\int_s^{\pi s} \frac{x}{\ln(x)} dx \geq \frac{1}{\ln(s) + \ln(\pi)} \int_s^{\pi s} x dx = \frac{1}{\ln(s) + \ln(\pi)} \left[\frac{x^2}{2} \right]_s^{\pi s} = \frac{(\pi^2 - 1)s^2}{2(\ln(s) + \ln(\pi))}.$$

d.v.s,

$$\frac{\pi^2 - 1}{2 \left(1 + \frac{\ln(\pi)}{\ln(s)} \right)} \leq \frac{\ln(s)}{s^2} \int_s^{\pi s} \frac{x}{\ln(x)} dx \leq \frac{\pi^2 - 1}{2}.$$

Då $\lim_{s \rightarrow \infty} \ln(s) = \infty$ har vi

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\pi^2 - 1}{2 \left(1 + \frac{\ln(\pi)}{\ln(s)} \right)} = \frac{\pi^2 - 1}{2} \quad \text{och}$$

från instängningsraten finner vi att

Svar: $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln(s)}{s^2} \int_s^{\pi s} \frac{x}{\ln(x)} dx = \frac{\pi^2 - 1}{2}.$