

Tentamen

Chalmers tekniska högskola & Göteborgs universitet

Matematisk analys TMV170/MVE045/MMGD31/MMGD30

2025-10-11, 14.00–18.00

Examinator: Simon Larson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Simon Larson, telefon: 031-772 28 89

Hjälpmedel: Inga

Totalt kan man få 50 poäng.

TMV170/MVE045/MMGD31 För betyget 3 krävs minst 20 poäng. För betyg 4 eller 5 krävs 30 resp. 40 poäng.

MMGD30: För betyget G krävs minst 20 poäng. För betyget VG krävs 36 poäng.

Skriv personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* blad.

Behandla endast en uppgift per blad (deluppgifter på samma blad är dock ok). Sortera och numrera dina blad innan du lämnar in. Motivera alla dina svar väl och renskriv dina lösningar. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. Använd inte röd penna.

1. (a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$$

- (b) Bestäm derivatan av $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definierad av

$$h(x) = \int_0^{x^2} e^{\cos(t)} dt.$$

- (c) Beräkna integralen

$$\int \cos(\sin(x)) \cos(x) dx.$$

- (d) Bestäm talet $c \in \mathbb{R}$ så att

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x - \pi} & \text{för } x \neq \pi, \\ c & \text{för } x = \pi, \end{cases}$$

är kontinuerlig i punkten $x = \pi$.

(8p)

2. Låt $f(x) = \sin(\ln(x))$. För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ har ekvationen $f(x) = a$

- (a) ingen lösning för x i intervallet $[1, e^{2\pi}]$?
- (b) exakt en lösning för x i intervallet $[1, e^{2\pi}]$?
- (c) exakt två lösningar för x i intervallet $[1, e^{2\pi}]$?
- (d) fler än två lösningar för x i intervallet $[1, e^{2\pi}]$?

(8p)

3. Bevisa utifrån derivatans definition att funktionen $f(x) = x^3$ är deriverbar och dess derivata ges av $f'(x) = 3x^2$.

(4p)

VÄND!

4. (a) Hitta alla lösningar till differentialekvationen

$$y''(x) - y'(x) = e^x.$$

- (b) Finn den funktion $y: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller att

$$\cos(x)^2 y'(x) + y(x) = 1 \quad \text{och} \quad y(0) = 2. \quad (6p)$$

5. För vilket eller vilka $b \in \mathbb{R}$ är realdelen av det komplexa talet

$$z = \frac{(1 + ib)^2}{1 + i}$$

noll? (4p)

6. En metalltråd i planet kan beskrivas i koordinater som kurvan

$$y = \frac{(2 + x^2)^{3/2}}{3} \quad \text{med} \quad 0 \leq x \leq 3$$

där koordinaterna anges i cm. Vad är den totala massan av metalltråden om dess densitet varierar med avseende på x enligt

$$\rho(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{g/cm?} \quad (8p)$$

7. Låt $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$ för $t \in (-1, 1)$.

- (a) Använd Taylorpolynomet till f av grad 2 kring $t = 0$ för att bestämma ett närmevärde till $f(1/\sqrt{2})$.

- (b) Använd Taylors sats för att visa att om A är det närmevärde du fann i (a) så är

$$0 \leq f(1/\sqrt{2}) - A \leq 4\sqrt{2}. \quad (6p)$$

8. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln(s)}{s^2} \int_s^{\pi s} \frac{x}{\ln(x)} dx.$$

Tips: Integralen är svår att beräkna explicit, använd istället lämpliga uppskattningar. (6p)

Lycka till!
Simon