Matematik Chalmers
Matematisk analys i en variabel Z, TMV135
Examinator: *Lennart Falk*

TENTAMEN: 2006-12-22

1. Beräkna
$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx.$$

2. Lös begynnelsevärdesproblemet
$$y'' - 4y' + 3y = 3x + 2, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

3. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin 2x}.$$

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen
$$y' = \frac{y^2}{1+x^2}$$
som är sådan att $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$.

5. Kurvan
$$y = \frac{2}{\sqrt{x(x+2)}}, \quad 1 \leq x \leq \infty,$$
roterar kring x-axeln.
Beräkna volymen av den obegränsade kropp som stängs in av den roterande kurvan och planet vinkelrätt mot x-axeln i $x = 1$.
Om du bara kan visa att volymen är ändlig, så ger det delpoäng.

6. Som alla känner till, börjar deltagarna i en kurs glömma vad de har lärt sig omedelbart efter det att tentan har lämnats in. Enligt *Ebbinghaus modell* gäller att hastigheten varmed det inlärda materialet glöms är proportionell mot differensen mellan det man för ögonblicket kommer ihåg och en konstant a. Låt $y(t)$ vara den andel av det totala inlärda materialet (=1) som koms ihåg vid tiden t månader efter tentan. Ett test har visat att man efter en månad minns andelen $\frac{1+a}{2}$ av det man hade lärt sig (här är $a < 1$). Bestäm funktionen $y(t)$ och avgör hur stor del av det man lärt sig som man aldrig glömmer.

7. (a) Funktionsfilen
```
function x=newton(x0,n)
for i=1:n
  x1=x0-(1+x0.*exp(-x0))./((1-x0).*exp(-x0));
  x0=x1;
end
```
löser i MATLAB en ekvation approximativt med Newtons metod via kommandot **newton(x0,10)**. Vilken ekvation, och ange ett exempel på startvärde $x0$ som kommer att ge en approximativ lösning?

   (b) Vilket begynnelsevärdesproblem löses i MATLAB med kommandot
`[t,y]=ode45(@(t,y)2*y+2*t.*sqrt(y),[1,2],0.5)`?
Det räcker att ange ODE och begynnelsevillkor.

8. (a) Formulera en medelvärdessats för integraler (=Mean-value Theorem for Integrals).

   (b) Man kan beräkna $f^{(8)}(0)$ (åttondederivatan i noll) för funktionen $f(x) = \cos x^4$ utan att derivera den 8 ggr. Berätta hur detta går till och ange den teoretiska motiveringen för detta.

   (c) Vad krävs för att serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}(f(n) - f(n+1))$$

   ska vara konvergent, och vilken blir i så fall dess summa?

Lösningsförslag, se nästa sida!

TMV135 2006-12-22 - FÖRSLAG TILL (MYCKET KORTFATTADE) LÖSNINGAR.

1. Variabelsubstitutionen $t = \sqrt{x}$ ger oss att $dx = 2tdt$, därefter partiell integration:

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 2te^t \, dt = 2[te^t]_0^2 - 2\int_0^2 e^t dt = 4e^2 - 2[e^t]_0^2 = \mathbf{2(e^2+1)}.$$

2. Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 3$ har lösningarna $r_1 = 1$ och $r_2 = 3$. Den allmänna homogena lösningen är alltså $Ae^x + Be^{3x}$. En partikulärlösning y_p finner vi genom ansättningen $y_p = Cx + D$, vilket ger oss $y_p = x + 2$. Alltså är $y = Ae^x + Be^{3x} + x + 2$ en allmän lösning till vår ekvation. Begynnelsevillkoren ger oss att $A = -3$ och $B = 1$, dvs $\mathbf{y = -3e^x + e^{3x} + x + 2}$.

3. Standardutvecklingar ger oss

$$\frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin 2x} = \frac{x(1 - x^2/2 + O(x^4)) - (x - x^3/6 + O(x^5)}{x^2(2x + O(x^3))} = \frac{-x^3/3 + O(x^5)}{2x^3 + O(x^5)},$$

som går mot $\mathbf{-1/6}$ då $x \to 0$. (Här kan man alternativt använda l'Hospitals regel).

4. Ekvationen är separabel och kan skrivas $y^{-2}y' = 1/(1+x^2)$. Lösningen $y = 0$ har då beaktats före division med y^2, men den uppfyller inte villkoret då $x \to \infty$. Detta ger oss

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$-\frac{1}{y} = \arctan x + C,$$

dvs $y(x) = (-C - \arctan x)^{-1}$. För att detta uttryck ska gå mot ∞ då $x \to \infty$ måste $-C = \pi/2$. Alltså $\mathbf{y(x) = (\pi/2 - \arctan x)^{-1}}$.

5. Rotationsvolymen är enligt skivformeln

$$\int_1^\infty \pi y^2 dx = \pi \int_1^\infty \frac{4}{x(x+2)} \, dx$$

Partialbråksuppdelning ger oss att

$$\frac{4}{x(x+2)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}$$

så

$$\pi \int_1^\infty \frac{4}{x(x+2)} \, dx = 2\pi \lim_{R\to\infty} [\ln x - \ln(x+2)]_1^R = 2\pi \lim_{R\to\infty} \left(\ln \frac{R}{R+2} + \ln 3\right) = \mathbf{2\pi \ln 3}.$$

6. Ebbinghaus modell med beteckningar enligt texten, och med konstanten $k > 0$:

$$y' = -k(y - a), \quad y(0) = 1$$

Om vi skriver om detta enligt

$$y' + ky = ka \quad y(0) = 1$$

så känner vi igen en *linjär ODE av 1:a ordningen*. Integrerande faktor är e^{kt}. Vi får efter multiplikation med denna:

$$(e^{kt}y)' = e^{kt}ka, \quad e^{kt}y = ae^{kt} + C$$

$y(0) = 1$ ger $C = 1 - a$, så $y = a + (1-a)e^{-kt}$. Villkoret $y(1) = \frac{1+a}{2}$ ger slutligen $e^{-k} = \frac{1}{2}$ och därmed

$$\mathbf{y = a + (1-a)\left(\frac{1}{2}\right)^t}$$

På lång sikt återstår gränsvärdet **a** av det inlärda.

7. (a) Koden svarar mot iteration av formeln

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

med $f(x) = 1 + xe^{-x}$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, vilket ger en approximativ lösning av ekvationen $1 + xe^{-x} = 0$ med begynnelsevärde x_0. Med derivatan undersöker vi grafen till f - ett enda nollställe $a < 0$, växer till ett maximum i $x = 1$, avtar sedan mot 1. Därmed måste man välja $\mathbf{x_0 < 1}$, t ex $x_0 = 0$.

(b) Begynnelsevärdesproblemet är

$$\mathbf{y' = 2y + 2t\sqrt{y}, \quad y(1) = 0,5}$$

8. (a) INTEGRALKALKYLENS MEDELVÄRDESSATS: Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så finns det ett tal $c \in [a, b]$ sådant att $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

(b) Använd Maclaurinpolynomet av grad 2 för cosinus: $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4)$, sätt $t = x^4$. Det ger $\cos x^4 = 1 - \frac{x^8}{2} + O(x^{16})$.
Enligt *entydighetssatsen* är detta Maclaurinpolynomet av grad 8 för $f(x) = \cos x^4$. Då är $\mathbf{\frac{f^{(8)}(0)}{8!}} = -\mathbf{\frac{1}{2}}$.

(c) Teleskopsumma: delsumma N blir $f(1) - f(N)$, som är konvergent om $f(N)$ har ett ändligt gränsvärde A, då $n \to \infty$. Seriens summa är då $\mathbf{f(1) - A}$.