MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

TMV200/211 – Diskret matematik

Tentamen: 2023-08-25, 14.00–18.00
Telefonvakt: Christian Johansson, 031-772 5325
Hjälpmedel: Inga
Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt
Observera: Beräkningar och motiveringar ska redovisas.
Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

---

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej:

$$\begin{array}{r} r \to (p \vee q) \\ q \to (p \wedge \neg r) \\ r \vee p \\ \neg(q \to r) \\ \hline p \to r \end{array}$$

Om argumentet är giltigt, förklara varför. Om det inte är giltigt, ge ett motexempel. (5p)

(b) Låt $P(x, y, z)$ vara predikatet $y + z^2 \geq x$, definierat på mängden $\mathbb{Z}$ (dvs definierat för $x, y, z \in \mathbb{Z}$). Avgör om följande utsagor

$$\exists x \exists z \forall y : P(x, y, z)$$

$$\exists y \forall x \forall z : P(x, y, z)$$

$$\exists x \exists y \forall z : P(x, y, z)$$

är sanna eller falska. Endast svar krävs. (3p)

2. Visa att det för alla heltal $n \geq 1$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+2)} = \frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}.$$

Du kan använda dig av identiteten $(n+1)^2(3(n+1)+5) = 3n^3 + 14n^2 + 19n + 8$ om det hjälper. (8p)

3. (a) Låt G_1 vara den riktade grafen med grannmatris

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rita G_1. (2p)

Var god vänd!

(b) Beräkna A^2 och tolka resultatet med hjälp av din ritning av G_1. (2p)

(c) Låt G_2 vara den underliggande (vanliga) grafen till G_1. Hur många kanter behöver man lägga till G_2 för att den skall ha en Eulercykel? Motivera ditt svar. (2p)

4. Låt $\mathbb{Z}_{\geq 2}$ vara mängden av alla heltal större än eller lika med 2. För $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, låt $d(n)$ vara den största delaren till n som är mindre än n. Definiera en relation $\sim$ på $\mathbb{Z}_{\geq 2}$ genom $m \sim n$ om $d(m) = d(n)$.

(a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation. (3p)

(b) Hitta alla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ som har $d(n) = 35$. (3p)

5. Låt A och B vara två ändliga delmängder till $\mathbb{R}$.

(a) Skriv påståendena "Alla element i A är större än alla element i B" samt på "Det finns ett element i A som är större än alla andra element i A" på predikatlogisk form. (4p)

(b) Är det andra påståendet i (a) sant (oavsett vad A är)? Motivera ditt svar. (3p)

6. (a) Låt m and n vara positiva heltal. Visa att om $\text{sgd}(m, n) > 2$ så måste vi ha $\text{sgd}(\Phi(m), \Phi(n)) > 1$. (3p)

(b) Bestäm alla heltalslösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 3 \quad (7) \\ x \equiv 1 \quad (3) \\ x \equiv 4 \quad (5). \end{cases}$$

(5p)

7. Givet bokstäverna i ordet MARATHON, hur många "ord" (dvs strängar av bokstäver) av längd fem kan man bilda om...

(a) alla A skall användas? (2p)

(b) alla bokstäver skall vara olika? (2p)

(c) bokstäverna RO skall vara med, och stå intill varandra i den ordningen? (3p)

Lycka till!
Christian

Lösningsförslag:

1. (a) Vi provar ett motsägelsebevis. Anta att hypoteserna är sanna men slutsatsen falsk. Eftersom slutsatsen är $p \to r$, så måste p vara sann och r falsk. Den fjärde hypotesen är $\neg(q \to r)$ och eftersom r är falsk måste q vara sann. Enligt den andra hypotesen blir då $p \wedge \neg r$ sann, vilket stämmer med att p är sann och r är falsk. Den första hypotesen är sann då r är falsk, och den tredje hypotesen är sann då p är sann.

Alltså blir hypoteserna sanna och slutsatsen falsk om vi låter p och q vara sanna och r vara falsk. Alltså är argumentet ogiltigt.

(b) Första utsagan är falsk, den andra är falsk, och den tredje är sann (kan välja $x = y = 0$).

2. Vi gör ett induktionsbevis. För basfallet $n = 1$ är vänsterledet

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{4}{k(k+2)} = \frac{4}{1 \cdot (1+2)} = \frac{4}{3}$$

och högerledet

$$\frac{1 \cdot (3 \cdot 1 + 5)}{(1+1)(1+2)} = \frac{8}{2 \cdot 3} = \frac{4}{3},$$

så basfallet är ok. För induktionssteget antar vi nu att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+2)} = \frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}.$$

(induktionsantagandet) och vill visa att

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{4}{k(k+2)} = \frac{(n+1)(3(n+1)+5)}{(n+2)(n+3)}. \tag{1}$$

Vänsterledet är

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{4}{k(k+2)} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+2)}\right) + \frac{4}{(n+1)(n+3)} = \frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)} + \frac{4}{(n+1)(n+3)}$$

där vi har använt induktionsantagandet för den andra likheten. Vi har

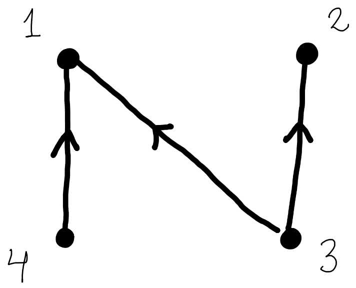
$$\frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)} + \frac{4}{(n+1)(n+3)} = \frac{n(3n+5)(n+3) + 4(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3n^3 + 14n^2 + 19n + 8}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

och högerledet i (1) är

$$\frac{(n+1)(3(n+1)+5)}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)^2(3(n+1)+5)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3n^3 + 14n^2 + 19n + 8}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

där vi har använt ledtråden i den andra likheten. Alltså stämmer induktionssteget, och vi har bevisat formeln för alla $n \geq 1$ enligt induktionsprincipen.

3. (a)



(b) Matrismultiplikation ger

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Det säger att det inte finns några riktade vägar av längd 2 i G_1, vilket vi ser från ritningen av G_1 i (a).

(c) G_2 är en 4-väg. Den saknar Eulercykel då två noder har udda gradtal. Om vi lägger till en kant för att få en 4-cykel så finns en Eulercykel, eftersom alla gradtal då är jämna (de är alla lika med 2).

4. (a) $\sim$ är reflexiv: Vi har $n \sim n$ för alla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ eftersom $d(n) = d(n)$.

$\sim$ är symmetrisk: Om $m \sim n$, då är $d(m) = d(n)$ enligt definitionen. Då gäller också $d(n) = d(m)$, dvs $n \sim m$.

$\sim$ är transitiv: Om $m \sim n$ och $n \sim q$, så är $d(m) = d(n)$ och $d(n) = d(q)$. Då är också $d(m) = d(q)$, så $m \sim q$.

(b) Följande formel gäller för $d(n)$: Om n har primtalsfaktorisering

$$n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$$

med $p_1 < \dots < p_r$ och $e_1, \dots, e_r \geq 1$, så är

$$d(n) = p_1^{e_1 - 1} \dots p_r^{e_r}.$$

Så om vi har $d(n) = 35 = 5 \cdot 7$, då är n antingen $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$, $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ eller $5 \cdot 5 \cdot 7 = 175$.

5. (a) Första påståendet är

$$\forall x \in A \ \forall y \in B : x \geq y.$$

Andra påståendet är

$$\exists x \in A \ \forall y \in A : y \neq x \to x \geq y.$$

(b) Det andra påståendet är sant om $A \neq \emptyset$: Eftersom A är ändligt finns det ett största element i A, och det är större än alla andra element i A. Däremot är det falskt om $A = \emptyset$ (eftersom det då inte finns några element alls). Alltså är påståendet falskt.

6. (a) Låt $d = \text{sgd}(m, n) > 2$. Kom ihåg att om x delar y så gäller att $\Phi(x)$ delar $\Phi(y)$ (exempelvis från formeln för Φ i termer av en primtalsfaktorisering). Alltså gäller att $\Phi(d)$ delar både $\Phi(m)$ och $\Phi(n)$, dvs $\Phi(d)$ delar $\text{sgd}(\Phi(m), \Phi(n))$. Men $d > 2$, så $\Phi(d) > 1$. Alltså måste $\text{sgd}(\Phi(m), \Phi(n)) > 1$.

(b) Den första ekvationen ger $x = 3 + 7y$. Insättning i den andra ekvationen ger då (efter förenkling) $y \equiv 1\ (3)$, dvs $y = 1 + 3z$, så $x = 3 + 7y = 3 + 7(1 + 3z) = 10 + 21z$. Insättning i den tredje ekvation ger, efter förenkling, $z \equiv 4\ (5)$, dvs $z = 4 + 5n$. Slutgiltigen ger det att alla fås av

$$x = 10 + 21z = 10 + 21(4 + 5n) = 94 + 105n,$$

där $n \in \mathbb{Z}$.

7. (a) Vi väljer först två av fem position där A:en skall sättas ut, kan göras på $\binom{5}{2} = 10$ sätt. För de tre återstående positionerna har vi sedan $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ sätt att ställa ut bokstäver, så totalt får $10 \cdot 120 = 1200$ olika ord".

(b) Ordet MARATHON innehåller 7 olika bokstäver, så för att sätta ut dem på fem positioner får vi $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ olika möjligheter.

(c) Vi delar upp i två fall: Antingen innehåller ordet på A:n, eller innehåller det högst ett A.

Fallet med två A: Det finns 4 olika ställer att ställa ut R på, sedan kommer O stå efter. Av de tre positioner som är kvar väljer vi en där vi sätter ut en bokstav som inte är R,O eller A, så det finns 4 olika alternativ. På resterande två positionerna sätter vi ut de två A:en. Totalt får vi då $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ ord.

Fallet med högst ett A: Återigen finns det 4 olika ställer att ställa ut R på, sedan kommer O stå efter. Resterande tre positioner skall ha olika bokstäver, så det finns $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ sätt att sätta ut bokstäver på de positionerna. Totalt får vi $4 \cdot 60 = 240$ olika ord med högst ett A.

Totalt får vi alltså $48 + 240 = 288$ ord.