MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

TMV200/211 – Diskret matematik

Tentamen: 2023-10-21, 14.00–18.00
Telefonvakt: Christian Johansson, 031-772 5325
Hjälpmedel: Inga
Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt
Observera: Beräkningar och motiveringar ska redovisas.
Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

---

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej:

$$\begin{array}{r} \neg(s \wedge p) \\ (\neg r) \rightarrow p \\ s \vee q \\ \hline r \vee q \end{array}$$

Om argumentet är giltigt, förklara varför. Om det inte är giltigt, ge ett motexempel. (4p)

(b) Låt M vara en mängd och låt $P(M)$ vara potensmängden till M. Låt $Q(X,Y)$ vara predikatet $X \subseteq Y$, definierat på mängden $P(M)$ (dvs definierat för $X, Y \in P(M)$). Avgör om följande utsagor

$$\forall X \forall Y : Q(X,Y)$$

$$\exists X \forall Y : Q(X,Y)$$

$$\forall X \exists Y : Q(X,Y)$$

är sanna eller falska. Endast svar krävs. (3p)

2. (a) Rita en graf med 8 noder där samtliga noder har gradtal 3. (3p)

(b) Finns det en graf med 9 noder där samtliga noder har gradtal 3? Motivering krävs. (3p)

3. Låt $\mathbb{Z}_+$ vara mängden av alla positiva heltal. Vi definierar en operator $*$ på $\mathbb{Z}_+$ genom regeln $a * b = a^b + b^a - 1$, för $a, b \in \mathbb{Z}_+$.

(a) Visa att $*$ är kommutativ och har en identitet. (3p)

(b) Är $*$ associativ? Vilka $a \in \mathbb{Z}_+$ har en invers med avseende på $*$? Motivering krävs. (4p)

Var god vänd!

4. (a) Låt $a \in \mathbb{Z}_+$. Visa att $2^a - 1$ och $2^a + 1$ inte har några gemensamma delare som är större än 1. (3p)

(b) Låt $n \in \mathbb{Z}_+$. Visa (med induktion eller på annat sätt) att det finns minst n olika primtal som delar $2^{(2^n)} - 1$. (5p)

5. (a) Skriv påståendena "Alla hamstrar är röda eller bruna" samt "Det finns elefanter som inte är grå hamstrar" på predikatlogisk form. Glöm inte att definiera ett lämpligt universum. (3p)

(b) Låt $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, och låt X_n vara mängden av alla grafer som har n noder, och låt X vara mängden av alla grafer. Låt $F(x)$ vara predikatet "x är fullständig" och låt $E(x)$ vara predikatet "x har en Eulerväg eller en Eulercykel", bägge definierade på X. Låt P_n vara utsagan

$$\exists x \in X_n : F(x) \wedge E(x).$$

För vilka n är P_n sann? Motivering krävs. (3p)

6. (a) Visa att 11 delar $3^{3n+4} + 7^{2n+1}$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. (3p)

(b) Bestäm alla heltalslösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \equiv 1 & (7) \\ x \equiv 5 & (9). \end{cases}$$

(5p)

7. (a) En skolklass består av 15 elever, varav 8 är flickor och 7 är pojkar. Klassen skall delas upp i tre grupper med fem elever i varje grupp, och varje grupp måste innehålla minst två pojkar. På hur många sätt kan det göras? (5p)

(b) Låt $n \in \mathbb{Z}_+$ och låt A vara en mängd med n element. Hur många antisymmetriska relationer finns det på A? En poäng kan fås om man löser specialfallet $n = 4$. (3p)

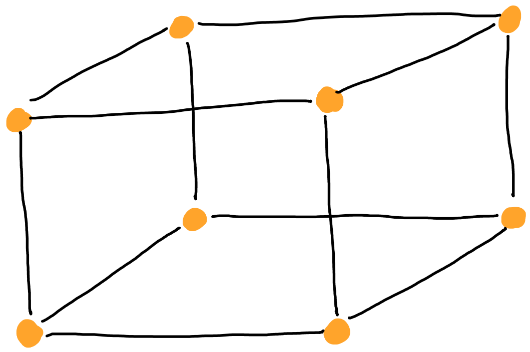
Lycka till!
Christian

Lösningsförslag:

1. (a) Vi provar ett motsägelsebevis. Antag att hypoteserna är sanna men slutsatsen falsk. Eftersom slutsatsen $r \vee q$ är falsk så är r och q bägge falska. Den andra hypotesen $(\neg r) \to p$ är sann, så eftersom r är falsk måste p vara sann. Den tredje hypotesen $s \vee q$ är sann och q är falsk, så s är sann. Men eftersom s och p är sanna så blir den första hypotesen $\neg(s \wedge p)$ falsk, en motsägelse. Alltså är argumentet giltigt.

(b) Det första påståendet är falskt och de övriga är sanna.

2. (a)



(b) Om en graf har 9 noder och alla gradtal är 3, så är summan av alla gradtal 27. Men summan av alla gradtal måste alltid vara jämnt, så det går inte. Alltså kan det inte finnas någon sådan graf.

3. (a) Vi har $a * b = a^b + b^a - 1 = b^a + a^b - 1 = b * a$, så $*$ är kommutativ. 1 är en identitet för $*$ eftersom $*$ är kommutativ och $a * 1 = a^1 + 1^a - 1 = a$ för alla $a \in \mathbb{Z}_+$.

(b) Vi beräknar

$$(2 * 2) * 3 = (2^2 + 2^2 - 1) * 3 = 7 * 3 = 7^3 + 3^7 - 1$$

och

$$2 * (2 * 3) = 2 * (2^3 + 3^2 - 1) = 2 * 16 = 2^{16} + 16^2 - 1.$$

Dessa är inte lika: Exempelvis så är $2^{16} + 16^2 - 1 \equiv -1\,(4)$ och

$$7^3 + 3^7 - 1 \equiv (-1)^3 + (-1)^7 - 1 \equiv -3 \equiv 1\,(4).$$

Alltså är $*$ inte associativ. Inverser: Om $a * b = 1$ så måste $a^b + b^a - 1 = 1$, dvs $a^b + b^a = 2$. Då måste $a = b = 1$; alltså är 1 det enda talet som har en invers med avseende på $*$.

4. (a) Låt $d \in \mathbb{Z}_+$. Om $d \mid 2^a - 1$ och $d \mid 2^a + 1$ så måste d dela $(2^a - 1) + (2^a + 1) = 2$, så d måste vara 1 eller 2. Men både $2^a - 1$ och $2^a + 1$ är udda, så d måste vara 1.

(b) Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall $n = 1$: $2^2 - 1 = 3$ har en primtalsfaktor, så basfallet stämmer.

Induktionssteg: Antag att $2^{(2^n)} - 1$ har minst n olika primtalsfaktorer. Vi vill visa att $2^{(2^{n+1})} - 1$ har minst $n+1$ olika primtalsfaktorer. Vi har

$$2^{(2^{n+1})} - 1 = 2^{(2^n \cdot 2)} - 1 = (2^{(2^n)})^2 - 1 = (2^{(2^n)} - 1)(2^{(2^n)} + 1)$$

Enligt induktionsantagandet har $2^{(2^n)} - 1$ minst n olika primtalsfaktorer, och $2^{(2^n)} - 1$ och $2^{(2^n)} + 1$ har inga gemensamma delare enligt del (a), så $2^{(2^n)} + 1$ har minst en primtalsfaktor som inte är något av de primtal som delar $2^{(2^n)} - 1$. Alltså har $2^{(2^{n+1})} - 1 = (2^{(2^n)} - 1)(2^{(2^n)} + 1)$ minst $n+1$ olika primtalsfaktorer.

Det avslutar induktionssteget och därmed hela induktionsbeviset.

5. (a) Vi låter vårt universum U vara mängden av alla djur. Vi definierar följande fem predikat på U: $H(x)$ är "x är en hamster", $R(x)$ är "x är röd", $B(x)$ är "x är brun", $E(x)$ är "x är en elefant", och $G(x)$ är "x är grå". Det första påståendet kan då skrivas som

$$\forall x \in U : H(x) \to (R(x) \vee B(x))$$

och det andra påståendet kan skrivas som

$$\exists x \in U : E(x) \wedge \neg(G(x) \wedge H(x)).$$

(b) Utsagan P_n är: Det finns en fullständing graf med n noder som har en Eulerväg eller en Eulercykel. I en fullständig graf med n noder har samtliga noder gradtal $n-1$. För att det skall finnas en Eulerväg eller Eulercykel så skall antingen alla gradtal vara jämna, eller så skall två gradtal vara udda och resten jämna. Vi ser att det stämmer om och endast om n är udda eller $n = 2$, så P_n är sann om och endast om $n = 2$ eller n är udda.

6. (a) Vi beräknar $3^{3n+4} + 7^{2n+1}$ modulo 11. Vi har $3^3 = 27 \equiv 5\,(11)$ och $7^2 = 49 \equiv 5\,(11)$, så vi kan skriva om uttrycket som

$$3^{3n+4} + 7^{2n+1} \equiv (3^3)^n \cdot 3^4 + (7^2)^n \cdot 7 \equiv 5^n \cdot 4 + 5^n \cdot 7 \equiv 5^n \cdot 11 \equiv 0\,(11),$$

dvs $3^{3n+4} + 7^{2n+1}$ är delbart med 11.

(b) Vi börjar med att lösa den första ekvationen, som vi först skriver om som $x^2 + 4x + 2 \equiv 0\,(7)$. Vi har

$$x^2 + 4x + 2 \equiv (x+2)^2 - 2 \equiv (x+2)^2 - 9 \equiv ((x+2) - 3)((x+2) + 3) \equiv$$

$$\equiv (x-1)(x+5) \equiv (x-1)(x-2)\,(7),$$

så vi ser att $x \equiv 1\,(7)$ eller $x \equiv 2\,(7)$, eftersom 7 är ett primtal. Det ger oss två linjära system,

$$\begin{cases} x \equiv 1 & (7) \\ x \equiv 5 & (9) \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} x \equiv 2 & (7) \\ x \equiv 5 & (9). \end{cases}$$

Vi börjar med det första systemet. Andra ekvationen ger $x = 5+9y$, $y \in \mathbb{Z}$, och insättning i den första ekvationen ger

$$5 + 9y \equiv 1\,(7),$$

så $2y \equiv -4\,(7)$, vilket ger $y \equiv -2\,(7)$, så $y = -2 + 7n$ och

$$x = 5 + 9y = 5 + 9(-2 + 7n) = -13 + 63n.$$

Det andra systemet löser vi på samma sätt: Vi har $x = 5 + 9y$, $y \in \mathbb{Z}$, och insättning i den första ekvationen ger

$$5 + 9y \equiv 2\,(7)$$

vilket ger $2y \equiv -3\,(7)$, så vi multiplicerar med 4 och får att $y \equiv -12 \equiv 2\,(7)$. Alltså är $y = 2 + 7n$ och

$$x = 5 + 9y = 5 + 9(2 + 7n) = 23 + 63n.$$

Alltså är x en lösning till det ursprungliga ekvationssystemet om och endast om $x \equiv -13\,(63)$ eller $x \equiv 23\,(63)$.

7. (a) En grupp kommer ha tre pojkar och de andra två kommer ha två pojkar. Vi kan välja ut pojkarna på

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 35 \cdot 6 \cdot 1 = 210$$

sätt. Vi kan sedan välja ut flickorna på

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 28 \cdot 20 \cdot 1 = 560$$

sätt. Totalt får vi då

$$\frac{210 \cdot 560}{2} = 58800$$

sätt, där vi delat med 2 för att inte dubbelräkna de två grupperna med tre flickor och två pojkar.

(b) Låt R vara en relation på A. Vi kan fritt välja om $a\,R\,a$ för alla $a \in A$, så det ger 2^n val. Sen har vi $n(n-1)/2$ oordnade par $a, b \in A$ med $a \neq b$, och tre val för om $a\,R\,b$ och/eller $b\,R\,a$ (vi får inte välja att både $a\,R\,b$ och $b\,R\,a$ eftersom R skall vara antisymmetrisk). Totalt får vi alltså

$$2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

antisymmetriska relationer på A.