MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

TMV200/211 – Diskret matematik

Tentamen: 2024-01-04, 08.30–12.30
Telefonvakt: Christian Johansson, 031-772 5325
Hjälpmedel: Inga
Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt
Observera: Beräkningar och motiveringar ska redovisas.
Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

---

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej:

$$\begin{array}{r} (\neg t) \to r \\ (q \vee (\neg p)) \to (\neg r) \\ p \to (q \wedge t) \\ \hline t \end{array}$$

Om argumentet är giltigt, förklara varför. Om det inte är giltigt, ge ett motexempel. (4p)

(b) Låt U vara mängden av alla (ändliga) icke-tomma grafer. Låt $D(x, y)$ vara predikatet "x är en delgraf till y", definierat på U. Avgör om följande utsagor

$$\exists x \forall y : D(x, y)$$

$$\exists y \forall x : D(x, y)$$

$$\forall x \exists y : D(x, y)$$

är sanna eller falska. Endast svar krävs. (3p)

2. Definiera en talföljd x_n för $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ genom

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = x_n + 4n. \end{cases}$$

Visa att det finns tal a, b och c så att $x_n = an^2 + bn + c$ för alla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, och bestäm a, b och c. (6p)

3. Definiera en binär operator $*$ på $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genom regeln

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Är $*$ kommutativ? Associativ? Visa att $*$ har en identitet, och bestäm alla (a, b) som har en invers, samt beräkna inversen. (6p)

Var god vänd!

4. (a) Låt G vara en bipartit graf. Visa att G inte har någon cykel av udda längd. (4p)

(b) En graf $G = (V, E)$ kallas för tripartit om det finns delmängder S_1, S_2 och S_3 till V så att $S_i \cap S_j = \emptyset$ för alla $i \neq j$, $V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, samt om $x, y \in S_i$ för något i så finns ingen kant mellan x och y. Med andra ord, en graf är tripartit om man kan färga noderna med tre färger så att ingen kant går mellan två noder av samma färg. Rita en tripartit graf som har en cykel av längd tre och en cykel av längd fyra. (4p)

5. (a) Skriv påståendena "Alla roliga nyårsfester har raketer" samt "Vissa julfester är inte roliga" på predikatlogisk form. Definiera *ett* lämpligt universum som du använder för bägge påståendena. (3p)

(b) Definiera en relation $\sim$ på $\mathbb{Z}$ genom $a \sim b$ om $ab = r^3$ för något $r \in \mathbb{Z}$. För vilka $a \in \mathbb{Z}$ gäller det att $a \sim a$? Motivering krävs. (4p)

6. (a) Beräkna $\Phi(4025)$. (2p)

(b) Bestäm alla heltalslösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 2 \quad (5) \\ x \equiv 3 \quad (7) \\ x \equiv 4 \quad (9). \end{cases}$$

och bestäm den minsta positiva heltalslösningen. (6p)

7. Givet bokstäverna i ordet SOMMARJOBB, hur många "ord" (dvs strängar av bokstäver) av längd sex kan man bilda om...

(a) man får välja vilka bokstäver som helst? (2p)

(b) man bara får välja bland de bokstäver som förekommer mer än en gång? (3p)

(c) bokstäverna MOS måste vara med och stå bredvid varandra, i den ordningen? (3p)

Svaren behöver inte förenklas.

Lycka till!
Christian

Lösningsförslag:

1. (a) Vi provar ett motsägelsebevis, så vi antar att slutsatsen är falsk men att alla hypoteser är sanna. Slutsatsen är t, så t är falsk. Då är $\neg t$ sann, så enligt första hypotesen $(\neg t) \to r$ måste då r vara sann. Då är $\neg r$ falsk, så enligt andra hypotesen måste $q \vee (\neg p)$ vara falsk, dvs q och $\neg p$ är båda falska. Då är q falsk och p sann, vilket gör att den tredje hypotesen $p \to (q \wedge t)$ är falsk, vilket är en motsägelse. Alltså är argumentet giltigt.

(b) Första påståendet är falskt (en graf med endast en nod är visserligen isomorf med en delgraf till alla icke-tomma grafer, men behöver inte själv vara en delgraf), andra påståendet är falskt (ingen graf innehåller alla andra grafer som en delgraf) och tredje påståendet är sant (kan exempelvis ta $y = x$).

2. Vi börjar med att bestämma för vilka a, b och c som formeln $x_n = an^2 + bn + c$ skulle kunna stämma. Sätt $f(n) = an^2 + bn + c$. Vi har $x_0 = 3$ enligt definitionen, och vi har $f(0) = c$, så vi måste ha $c = 3$. Sedan har vi

$$x_1 = x_0 + 4 \cdot 0 = 3,$$

samt $f(1) = a + b + 3$, så vi måste ha $a + b = 0$. Vi har också

$$x_2 = x_1 + 4 \cdot 1 = 7$$

och $f(2) = 4a + 2b + 3$. Eftersom $a + b = 0$ så är $4a + 2b + 3 = 2a + 3$, så vi måste ha $2a = 4$, dvs $a = 2$, och därmed $b = -2$. Så

$$f(n) = 2n^2 - 2n + 3.$$

Nu vill vi visa att $x_n = f(n)$ för alla n, vilket vi gör med induktion. Vi har redan visat det för $n = 0, 1, 2$, så vi har redan visat basfall ($n = 0$ räcker som basfall). Vi gör då induktionssteget. Antag att $x_n = f(n)$ för ett specifikt n (induktionsantagandet). Då är

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n + 4n = f(n) + 4n = 2n^2 - 2n + 3 + 4n = 2n^2 + 2n + 3 = \\ = 2(n+1)^2 - 2(n+1) + 3 = f(n+1), \end{aligned}$$

vilket var det vi ville visa. Alltså är $x_n = f(n)$ för alla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

3. Operatorn $*$ är både kommutativ och associativ: För kommutativitet, notera att

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da) = (c, d) * (a, b);$$

för associativitet har vi

$$((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (ac - bd, ad + bc) * (e, f) =$$

$$= ((ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e) = (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce)$$

och

$$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (ce - df, cf + de) =$$

$= (a(ce-df)-b(cf+de), a(cf+de)+b(ce-df)) = (ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf)$, så vi ser att $((a,b)*(c,d))*(e,f) = (a,b)*((c,d)*(e,f))$, dvs $*$ är associativ. Identiten är $(1,0)$, eftersom

$$(1,0)*(a,b) = (a,b)*(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0, a\cdot 0 + b\cdot 1) = (a,b)$$

för alla $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Det återstår att hitta de inverser som finns. Notera att

$$(0,0)*(x,y) = (0,0)$$

för alla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, så $(0,0)$ har ingen invers. För (a,b) med $a \neq 0$ så kan vi beräkna inversen så här: Vi söker (x,y) med

$$(a,b)*(x,y) = (ax-by, ay+bx) = (1,0).$$

Vi har då $ay+bx = 0$, dvs $y = -bx/a$ (eftersom $a \neq 0$), samt $ax - by = 1$. Insättning av $y = -bx/a$ i $ax - by = 1$ ger

$$1 = ax - by = ax + b^2x/a = x(a + b^2/a),$$

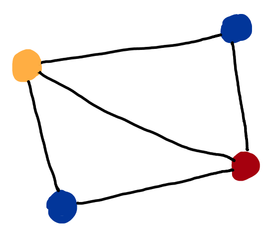
dvs $x = a/(a^2+b^2)$, vilket ger $y = -b/(a^2+b^2)$, så inversen till (a,b) är

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

Om istället $b \neq 0$ så kan man med exakt samma typ av räkningar komma fram till att samma formel ger inversen. Alltså har alla $(a,b) \neq (0,0)$ en invers, som är given av formeln ovan.

4. (a) Vi färgar noderna i G blåa och röda så varje kant går mellan en blå nod och en röd nod. Låt $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara en väg i G av längd n, med n udda. Om v_0 är blå så kommer v_1 vara röd, v_2 blå osv., så v_n kommer vara röd. På samma sätt så kommer v_n vara blå om v_0 är röd, dvs v_0 och v_n kommer ha olika färg (eftersom n är udda). Så vi kan inte ha $v_0 = v_n$ eftersom de har olika färg, så vår väg kan inte vara en cykel.

(b) Följande graf är tripartit (jag använder färgerna gul, blå och röd) och har cykler av längd tre och längd fyra:



5. (a) Låt universum U vara mängden av alla fester. Vi definierar följande predikat på U:

$$N(x) \ : \ x \text{ är en nyårsfest}$$

$$R(x) \;:\; x \text{ är en rolig fest}$$
$$F(x) \;:\; x \text{ har raketer}$$
$$J(x) \;:\; x \text{ är en julfest}$$

Då kan det första påståendet skrivas som

$$\forall x \in U : N(x) \wedge R(x) \to F(x)$$

och det andra påståendet kan skrivas som

$$\exists x \in U : J(x) \wedge \neg R(x).$$

(b) Enligt definitionen har vi $a \sim a$ om $a^2 = r^3$ för något $r \in \mathbb{Z}$. Vi påstår att detta gäller om och endast om $a = s^3$ för något $s \in \mathbb{Z}$. Om $a = s^3$, då är $a^2 = s^6 = (s^2)^3$ så vi kan sätta $r = s^2$. Omvänt, anta att $a^2 = r^3$ för något $r \in \mathbb{Z}$. Talen a och r måste då ha samma primtalsfaktorer $p_1, \ldots, p_n$ säg; låt

$$a = p_1^{c_1} \ldots p_n^{c_n}$$

och

$$r = p_1^{b_1} \ldots p_n^{b_n}$$

vara primtalsfaktoriseringarna. Eftersom $a^2 = r^3$ så gäller $2c_i = 3b_i$ för $i = 1, \ldots, n$, så vi måste ha $c_i = 3d_i$ för något d_i (eftersom 3 är ett primtal). Så om vi sätter

$$s = p_1^{d_1} \ldots p_n^{d_n}$$

så är $a = s^3$.

6. (a) Primtalsfaktorisering av 4025 ger $4025 = 5^2 \cdot 7 \cdot 23$, så vi får att

$$\Phi(4025) = \Phi(5^2) \cdot \Phi(7) \cdot \Phi(23) = 20 \cdot 6 \cdot 22 = 2640.$$

(b) Första ekvation ger $x = 2 + 5y$, $y \in \mathbb{Z}$. Insättning i andra ekvationen ger då

$$2 + 5y \equiv 3 \;\; (7),$$

som vi kan skriva om till $5y \equiv 1$ (7). Inversen till 5 modulo 7 är 3, så vi ser att $y \equiv 3$ (7), dvs $y = 3 + 7z$ för något $z \in \mathbb{Z}$. Det ger att

$$x = 2 + 5y = 2 + 5(3 + 7z) = 17 + 35z.$$

Insättning i tredje ekvationen ger

$$17 + 35z \equiv 4 \;\; (9),$$

som vi kan förenkla till $-z \equiv 5$ (9), dvs $z \equiv 4$ (9). Så $z = 4 + 9n$ för något $n \in \mathbb{Z}$ och därmed är

$$x = 17 + 35z = 17 + 35(4 + 9n) = 157 + 315n$$

med $n \in \mathbb{Z}$, vilket ger samtliga lösningar, och vi ser att 157 är den minsta positiva heltalslösningen.

7. Vi har sju olika bokstäver totalt i SOMMARJOBB, varav tre förekommer två gånger.

(a) Vi delar in i fall beroende på hur många dubbletter som ordet innehåller:

0 dubbletter: Då skall vi välja bland 7 bokstäver till 6 positioner, det kan göras på $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 7! = 5040$ olika sätt.

1 dubblett: Tre val för vilken bokstav som skall förekomma två gånger, $\binom{6}{2}$ olika sätt att placera ut dubbletten på, sen $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ sätt att fylla de fyra övriga positionerna. Totalt

$$3 \cdot \binom{6}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 16200$$

ord.

2 dubbletter: $\binom{3}{2} = 3$ val för vilka bokstäver som skall förekomma två gånger, $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}$ olika sätt att placera ut dubblettera, $5 \cdot 4$ sätt att fylla de två övriga positionerna. Totalt

$$3 \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 5400$$

ord.

3 dubbletter: Då innehåller ordet bara dubbletter, och vi har inga val av vilka bokstäver eftersom endast tre bokstäver finns som dubbletter. Så vi får

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 90$$

ord. Totalt får vi alltså

$$5040 + 16200 + 5400 + 90 = 26730$$

ord.

(b) Om vi bara får välja bland O, M och B så måste vi ha två M, två O och två B, dvs vi är i fallet med tre dubbletter från (a), så det blir 90 ord.

(c) Vi delar in i två fall, om vi har två B i ordet eller inte.

Två B: MOS"kan sättas ut på 4 olika ställen, sen har vi $\binom{3}{2} = 3$ möjligheter för var vi skall sätta ut de två B:en och slutligen 5 olika möjligheter för vilken bokstav vi skall sätta på den sista positionen. Det ger $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ ord.

Inte två B: MOS"kan sättas ut på 4 olika ställen, sen har vi tre positioner kvar där vi skall välja från 6 bokstäver, kan göras på $6 \cdot 5 \cdot 4$ sätt. Det ger $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 480$ ord.

Totalt får vi alltså $480 + 60 = 540$ ord.