

MATEMATIK

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA & GÖTEBORGS UNIVERSITET

TMV200/211 Diskret matematik

Tentamen: 2024-10-26, 14:00–18:00

Telefonvakt: Pierre Nyquist, 031 772 2294

Hjälpmedel: Godkänd miniräknare, 2st A4-blad (fram och baksida) med egna anteckningar.

Observera: Utöver uppgift 1–3 ska beräkningar och motiveringar redovisas.

Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

På uppgift 1–3 ska endast svar lämnas. I dessa uppgifter är deluppgifterna oberoende av varandra och kan därmed lösas separat.

Uppgift 1 Vilka av följande påståenden är tautologier?

- (i) $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow \neg p$,
- (ii) $((p \rightarrow r) \wedge (q \wedge \neg r)) \rightarrow \neg p$,
- (iii) $((p \wedge r) \wedge (q \wedge \neg r)) \rightarrow \neg p$.

(6p)

Uppgift 2

- a) Hur många av talen i $\{1, 2, \dots, 194\}$ har en multiplikativ invers modulo 195? (2p)
- b) Bestäm största gemensamma delare för 273 och 756. (2p)

Uppgift 3

- a) Låt u, v vara noder på olika sidor av den bipartita grafen $K_{3,3}$. För $n \in \mathbb{N}$, låt w_n vara antalet vägar av längd n mellan u och v . Bestäm en formel för w_n . (3p)
- b) En **bit** är en 1:a eller en 0:a och en n -**bit sträng** är en följd av n bits. Hur många 8-bits strängar finns det som startar med 1011 eller 01? (2p)
- c) Hur många 8-bits strängar (se (b) för en definition) innehåller sex eller fler 1:or? (2p)

Uppgift 4

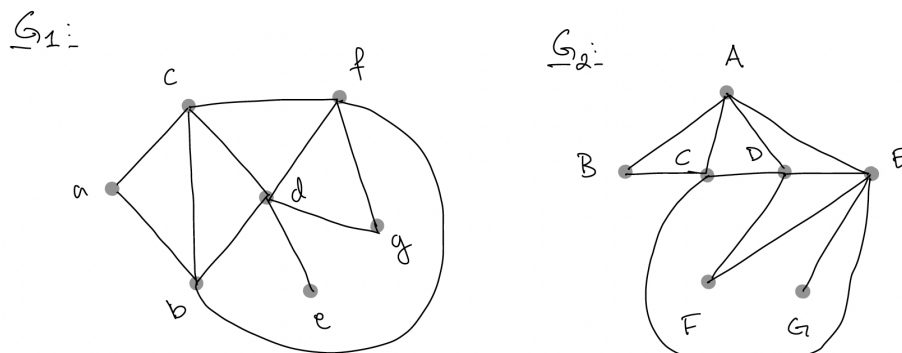
Bestäm det minsta positiva heltalet x som uppfyller

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{7}, \\2x &\equiv 1 \pmod{9}, \\4x &\equiv 1 \pmod{11}.\end{aligned}$$

(8p)

Uppgift 5

- a) Definiera vad det betyder att två grafer $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ är *isomorfa*. (2p)
- b) Ange en isomorfi för graferna G_1 och G_2 i Figur 1. (3p)
- c) Har grafen G_1 i Figur 1 en Eulercykel resp. en Eulerväg? För bägge frågorna, om ditt svar är "Ja" ge *ett* explicit exempel av en sådan cykel resp. väg. Om ditt svar är "Nej" förklara varför. (4p)



Figur 1: Graferna G_1 och G_2 i Uppgift 5.

Uppgift 6 Ge minst två olika bevis för formeln: $\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. (8p)

Uppgift 7 Låt $\star$ vara en binär operator på en mängd G . Man säger att G med operatoren $\star$ är en *grupp* om följande villkor är uppfyllda:

- Operatoren $\star$ är associativ på G .
- Det finns en identitet $e \in G$ för $\star$.
- Varje element i G har en invers med avseende på $\star$ i G .

En delmängd $H \subset G$ är en *delgrupp* till G om H också är en grupp med operatoren $\star$. Det innebär bland annat att identiteten e måste ligga i en sådan H .

Låt H vara en delgrupp i en grupp G med en operator $\star$. Beteckna med e identiteten och för ett element g betecknas dess invers med g^{-1} . Definiera en relation $\mathcal{R}$ på G enligt $a\mathcal{R}b$ om och endast om $a \star b^{-1} \in H$.

- a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.
- b) För N ett positivt heltal, låt $H_N = \{k \in \mathbb{Z} : N \mid k\}$. Motivera att $\mathbb{Z}$ med addition är en grupp och att H_N är en delgrupp till $\mathbb{Z}$.
- c) Vad är relationen $\mathcal{R}$ definierade ovan i specialfallet $G = \mathbb{Z}$, med addition som operatoren $\star$ och $H = H_N$? (8p)

Lycka till!