

Lösningsskrifning 2025-01-08

1 Svar: (i) och (ii) är tautologier.

Lösning: Kan ihåg att en tautologi är en logisk formel med sanningsvärde 1 oavsett sanningsvärdena för de ingående uttågarna/Böckerna variabler (här p, q, r).

Notera att en implikation alltid är sann om hypotesen är falsk, varför vi kan fokusera på fall med hypotesen sann.

Fall (i): Om minst en av p och q är sann så säger hypotesen att r är sann; precis samma för slutsatsen.

Fall (ii): För att hypotesen ska vara sann måste vi ha både $\neg q$ och p , vilket då medför att även r måste vara sann ($p \wedge \neg q \rightarrow r$). Då är även slutsatsen sann.

Fall (iii): Ta p och q falska. Då är hypotesen sann men slutsatsen falsk $\Rightarrow$ ej tautologi. 1

21 Svar. (a) 25

$$(b) \frac{18!}{(2!)^3 (3!) (4!)}$$

Lösning: (a) En udda summa kräver ett jämnt nummer
och ett udda. Dvs, måste de ena kulan från
samlingen $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ och den andra från $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Multiplikationsprincipen ger därför $5 \cdot 5 = 25$ möjliga sätt.

(b) Ordet har 18 bokstäver, var is hiter samma
bokstav flera gånger enligt:

$$A: 2$$

$$I: 2$$

$$T: 2$$

$$N: 3$$

$$S: 4$$

Antalet "ord" som kan bildas ges alltså av

$$\frac{18!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{18!}{(2!)^3 \cdot 3! \cdot 4!}$$

3) Svar: (a) Matrisen ges av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Ja, det finns en Eulertåg.

(c) 20 kanter.

Lösningar: (a) per definition.

(b) Endast noderna 1 & 2 har udda grad, varför det finns en Eulertåg mellan dem.

(c) Grafen består av två samlingar noder, blåa & r.
gröna (4st) och röda (5st) noder. Med en kant
mellan varje möjliga par eller de två grupperna
ger multiplikationsprincipen $4 \cdot 5 = 20$ kanter.

4) #) Ett första bevis ges av binomialformeln: För x, y har vi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

$$\text{Sätt } x=y=1 \Rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} //$$

#) Vi kan använda oss av tolkningen av $\binom{n}{k}$:

Ur en mängd med n element, på hur många sätt kan vi plocka ut k av dem. $\binom{n}{k}$ är därmed antalet delmängder ur, t.ex., $\{1, 2, \dots, n\}$ med k element.

$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ är totalt antalet delmängder till

$\{1, 2, \dots, n\}.$

Det somre är precis storleken av potensmängden

$\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})$, som vi vet är 2^n . [Alt: n oberoende val, med 2 möjligheter]

###) Vi visar påståendet via induktion.

För basfallet $n=1$ har vi

$$\left. \begin{array}{l} \text{V.h.} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1+1=2 \\ \text{H.h.} = 2^1 = 2 \end{array} \right\} \text{V.h.} = \text{H.h.}, \text{ så ok.}$$

Antag nu att påståendet gäller för $n \geq 2$.

Betrakta fallet $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k}$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k}$$

Betrakta nu summan ovan: Grått är allmänt att

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \quad (*)$$

Grått att

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \binom{n}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 1$$

Hilande: $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \binom{n}{0} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 1$

Sätt in i (*):

$$1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 1 + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 1 \right) + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 1 \right)$$

$$= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 1$$

Från induktionsantagandet:

$$2 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$\forall i$ har det med rest , med induktionsbegreppet, att

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \\ &= 1 + 2^{n+1} - 1 \\ &= \underline{\underline{2^{n+1}}}\end{aligned}$$

De påståendet håller även för basfallet ger induktionsprincipen
nu att det är sant för samtliga $n \geq 1$, dvs:

$$\text{för heltal } n \geq 1 \text{ gäller } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \underline{\underline{2^n}}$$

5) a) Använd Euklides för att hitta $\text{sgl}(49, 19)$:

$$49 = 2 \cdot 19 + 11$$

$$19 = 1 \cdot 11 + 8$$

$$11 = 1 \cdot 8 + 3$$

$$8 = 2 \cdot 3 + 2$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

Vi ser härmed att $\text{sgl}(49, 19) = 1$. Vi har förstås också att 1 delar 2000 $\Rightarrow$ ekvationen $19x + 49y = 2000$

har en lösning.

Vi kör nu Euklides baklänges för att hitta en sådan lösning:

$$1 = 3 - 2$$

$$= 3 - (8 - 2 \cdot 3)$$

$$= 3 \cdot 3 - 8$$

$$= 3(11 - 8) - 8$$

$$= 3 \cdot 11 - 4 \cdot 8$$

$$= 3 \cdot 11 - 4(19 - 11)$$

$$= 7 \cdot 11 - 4 \cdot 19$$

$$= 7 \cdot (49 - 2 \cdot 19) - 4 \cdot 19$$

$$= 7 \cdot 49 - 18 \cdot 19$$

$$\Rightarrow 1 = -18 \cdot 19 + 7 \cdot 49$$

$$\Leftrightarrow 2000 = -36000 \cdot 19 + 14000 \cdot 49$$

Vi har alltså en lösning med $x_0 = -36000$, $y_0 = 14000$

Allmänna lösningen för lösning av

$$(x, y) = (-36000 + 49n, 14000 - 19n), n \in \mathbb{Z}.$$

Slutligen har vi att minsta n för vilket $-36000 + 49n$ blir positivt är $n = 735$. Insatt man ger det

$$x_1 = 15.$$

Vadare för vi $y_1 = 14000 + 19 \cdot 735 = 35$.

Väljer vi $n = 736$ får vi $x_2 = 64$, $y_2 = 16$, ytterligare en positiv lösning. Större värden på n ger negativt y -värde (monskar med 19 för varje ökning i n). Alltså finns det två positiva lösningar: $(15, 35)$ och $(64, 16)$.

b) Beträkta $38x \equiv 14 \pmod{98}$. (*)

Vi börjar med att bestämma hur många det finns en

lösning. Primtalsfaktorisering av 14, 38 och 98 ger

$$38 = 2 \cdot 19, 14 = 2 \cdot 7, 98 = 2 \cdot 7^2$$

$\Rightarrow \text{sgd}(38, 98) = 2$, och 2 delar 14, vilket betyder att det finns en lösning.

Från det senare har vi också att (*) är ekvivalent med

$$19x \equiv 7 \pmod{49}$$

Vi är klara om vi kan hitta 19^{-1} i $\mathbb{Z}_{49}$:

Notera att från lösningen till (a) har vi att $19^{-1} \equiv -18 \pmod{49}$
(ty $1 = -18 \cdot 19 + 7 \cdot 49$).

$\Rightarrow$

$$x \equiv 19^{-1} \cdot 7$$

$$\equiv -18 \cdot 7 \pmod{49}$$

$$\equiv -126$$

$$\equiv -28$$

$$\equiv \underline{\underline{21 \pmod{49}}}$$

der vi har fått stegat för att hitta minst positiva lösningen.

6) Vi behöver visa att R är reflexiv,
antisymmetrisk och transitiv.

Lösning 1:

I) Reflexiv: Tag $(a_1, a_2) \in S_1 \times S_2$. Vi är i fll (ii) av definitionen av R (ty vi är intresserade om (a_1, a_2) har relationen R med (a_1, a_2)).

Även om R_2 är en partuell ordning på S_2 gäller $a_2 R_2 a_2$, vilket medför att $(a_1, a_2) R (a_1, a_2)$.

II) Antisymmetrisk: Tag $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in S_1 \times S_2$ och antag att $(a_1, a_2) R (b_1, b_2)$ och $(b_1, b_2) R (a_1, a_2)$.

Först, antag att $a_1 \neq b_1$. Definitionen av R ger då att $a_1 R_1 b_1$ gäller. På samma sätt för vi att $b_1 R_1 a_1$ gäller. Men R_1 antisymmetrisk $\Rightarrow$ måste gälla att $a_1 = b_1$. Vårt antagande att $a_1 \neq b_1$ kan alltså inte gälla när $(a_1, a_2) R (b_1, b_2)$ och $(b_1, b_2) R (a_1, a_2)$.

Använd nu (ii) i definitionen av R : måste gälla att $a_2 R_2 b_2$ och $b_2 R_2 a_2$.

Men även R_2 är antisymmetrisk $\Rightarrow a_2 = b_2$.

$\forall$ har därmed att $(a_1, a_2)R(b_1, b_2)$ om $(b_1, b_2)R(a_1, a_2)$
medför att $a_1 = b_1, a_2 = b_2$.

Alltså är R antisymmetrisk.

III) Transitiv: Visas med en strategi liknande antisymmetrin.

Tag $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ och $(c_1, c_2) \in S_1 \times S_2$. Antag

$(a_1, a_2)R(b_1, b_2)$ och $(b_1, b_2)R(c_1, c_2)$.

i) Antag först att $a_1 \neq b_1, b_1 \neq c_1, a_1 \neq c_1$.

Definitionen av R ger då att

$a_1 R_1 b_1$ och $b_1 R_1 c_1$.

R_1 transitiv $\Rightarrow a_1 R_1 c_1$. Eftersom $a_1 \neq c_1$ ger det här att
 $(a_1, a_2)R(c_1, c_2)$.

ii) Antag nu att $a_1 \neq b_1, b_1 = c_1$.

$\forall$ har då att $a_1 R_1 b_1$ och $b_2 R_2 c_2$.

Eftersom R_1 är reflexiv gäller $b_1 R_1 c_1$. R också transitiv,
vilket ger $a_1 R_1 c_1$.

Eftersom $a_1 \neq c_1$ ger det att $(a_1, a_2)R(c_1, c_2)$.

iii) Antag att $a_1 = b_1, b_1 \neq c_1$.

$(b_1, b_2)R(c_1, c_2)$ implikerar då att $b_1 R_1 c_1$.

Liknande från fallet ger reflexivitet av R_1 att $a_1 R_1 b_1$ gäller.

Transitivitet ger sedan att $a_1 R_1 c_1$

$$\Rightarrow (a_1, a_2) R (c_1, c_2).$$

iv) Antag att $a_1 = c_1$, $a_1 \neq b_1$.

Vi har att $a_1 R_1 b_1$, samt (ty $b_1 \neq c_1$ att reflexivitet) $b_1 R_1 c_1$, vilket är det samma som $b_1 R_1 a_1$. Antisymmetri av $R_1 \Rightarrow a_1 = b_1$.

Från $(a_1, a_2) R (b_1, b_2)$, det här ger att $a_2 R_2 b_2$.

Vi har $b_2 R_2 c_2$ och från transitivitet för R_2 får vi nu $a_2 R_2 c_2 \Rightarrow (a_1, a_2) R (c_1, c_2)$.

v) Antag att $a_1 = b_1 = c_1$. Definitionen av R ger då att

$$a_2 R_2 b_2 \text{ och } b_2 R_2 c_2.$$

$$R_2 \text{ transitiv} \Rightarrow a_2 R_2 c_2 \Rightarrow (a_1, a_2) R (c_1, c_2).$$

Vi har därmed visat att R är transitiv, vilket tillsammans med $\subseteq$ & $\neq$ ger att R är en partell ordning på $S_1 \times S_2$.

Notera: Beviset kan göras kortare och flera fall kan behandlas samtidigt. Vi skriver här ut de direkta kombinationerna för extra tydlighet.

Alt. lösning: Vi visar att R är reflexiv och transitiv på ett något kortare sätt än ovan.

Antisymmetri: Tag $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in S_1 \times S_2$.

Antag $(a_1, a_2) R (b_1, b_2)$ och $(b_1, b_2) R (a_1, a_2)$.

Oavsett val av a_1, b_1 ger antagandet att

$$a_1 R b_1 \text{ och } b_1 R a_1 \Rightarrow a_1 = b_1, \text{ ty } R_1 \text{ antisymmetrisk.}$$

Därmed ger antagandet att

$$a_2 R_2 b_2 \text{ och } b_2 R_2 a_2$$

$$\text{Men } R_2 \text{ antisymmetrisk} \Rightarrow a_2 = b_2.$$

$$\text{Alltså måste vi ha } (a_1, a_2) = (b_1, b_2).$$

Transitiv: Låt $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in S_1 \times S_2$

$$\text{sådana att } (a_1, a_2) R (b_1, b_2) \text{ och } (b_1, b_2) R (c_1, c_2). (**)$$

Från def. av R vet vi då att $a_1 R_1 b_1, b_1 R_1 c_1$

$$R_1 \text{ transitiv} \Rightarrow a_1 R_1 c_1.$$

Om $a_1 \neq c_1$ ger även att $(a_1, a_2) R (c_1, c_2)$.

Notera att det gäller oavsett val av b_2 , utöver att antagandet $(**)$ måste gälla.

Antag nu att $a_1 = c_1$.

Från antisymmetri hos R_1 får vi att $a_1 = b_1$,

ty hos att $a_1 R_1 b_1$ och $b_1 R_1 c_1$, vilket med $a_1 = c_1$ ger $b_1 R_1 a_1$.

Från (**) har vi därmed att

$$a_2 R_2 b_2$$

OBS: Vi kan enkelt säga det eftersom vi vet att $a_1 = b_1$, annars
ett givet från $(a_1, a_2) R (b_1, b_2)$.

Nu har vi $(b_1, b_2) R (c_1, c_2)$ med $b_1 = c_1$

$$\Rightarrow b_2 R_2 c_2.$$

Transitivitet för $R_2 \Rightarrow a_2 R_2 c_2$.

Sammantaget har vi därmed $(a_1, a_2) R (c_1, c_2)$,
där R är transitiv.

7) a) Observera att om F_n och F_{n+1} har en gemensam delare $d \neq 1$, dvs F_n och F_{n+1} är ej relativt prima, då gäller även att

$$d \mid F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

$$d \mid F_{n+1} = F_{n+1} - F_n$$

Dvs, alla talen i Fibonacci-följden måste ha d som gemensam delare. Vi skriver upp de inledande talen:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

De första fem talen har bara 1 som gemensam delare, alltså kan det inte finnas något annat $d > 1$ s.s.

$$\text{sgl}(F_n, F_{n+1}) = d.$$

b) För att bestämma vilken som är jämn (dvs delbar med 2), delbar med 3 och 5, resp., kan vi titta på följden mod 2, 3 och 5.

mod 2: Kalla följden mod 2 för F_n^2 .

$$F_1^2 = 1, F_2^2 = 1, F_3^2 = 0, \dots, F_n^2 = F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 \text{ i } \mathbb{Z}_2.$$

Eftersom summan av två jämna tal och två udda tal
 båda är jämna och summan av ett jämnt och ett udda
 är udda, gäller att var tredje element i F_n^2 är
 0, omväxlar är 1; följden har formen

$$1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$$

Det var tredje element i F_n är jämnt, eller elementen i $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

mod 3: Liknande ovan, låt F_n^3 betyda följden mod 3,

$$\text{Vi har } F_1^3 = 1, F_2^3 = 1, F_3^3 = 2, F_4^3 = 0,$$

$$F_5^3 = 2, F_6^3 = 2, F_7^3 = 1, F_8^3 = 0, \dots$$

Vi ser nu att följden kommer ha ovan periodisk form,

$$\text{ty } F_9^3 = 1 + 0 \equiv 1 \pmod{3},$$

$$F_{10}^3 = 0 + 1 \equiv 1 \pmod{3},$$

och återigen är vi tillbaka i ursprunget ovan.

$\Rightarrow$ var tredje tal i $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ är delbart med 3.

mod 5: Med samma typ av argument som ovan får vi att
 var femte tal i $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ är delbart med 5.

Perioden är betydligt längre (20), men precis som

i de tidligere feller ser vi at man etter 20 element
återkommer til $F_{21}^S = 1$, $F_{22}^S = 1$, precis som
 $F_1^S = F_2^S = 1$, og disse er egenvektorene.
