

MATEMATIK

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA & GÖTEBORGS UNIVERSITET

## TMV200/211 Diskret matematik

Tentamen: 2025-01-08, 08:30–12:30

Telefonvakt: Pierre Nyquist, 031 772 2294

Hjälpmedel: Godkänd miniräknare, 2st A4-blad (fram och baksida) med egna anteckningar.

**Observera:** Utöver uppgift 1–3 ska beräkningar och motiveringar redovisas.

Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

---

På uppgift 1–3 ska endast svar lämnas; de kan redovisas på samma lösningspapper.

**Uppgift 1** Vilka av följande påståenden är tautologier?

- (i)  $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$ ,
- (ii)  $((p \vee q) \wedge \neg q \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow r$ ,
- (iii)  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \vee q)$ .

(6p)

### Uppgift 2

a) I en låda finns 10 kulor, numrerade enligt 1–10. Utan att se kulorna drar du två stycken. Du adderar sedan de två talen. På hur många sätt kan du få en udda summa?

(3p)

b) Hur många “ord”, det vill säga strängar som innehåller samtliga bokstäver, kan man bilda av ordet “AVLYSSNINGSSSTATION”.

(4p)

### Uppgift 3

a) Betrakta den riktade grafen  $G$  i Figur 1. Skriv ned motsvarande grannmatris.

(2p)

b) Låt nu  $\tilde{G}$  vara den *oriktade* (multi-) grafen som fås från  $G$  i Figur 1 när vi tar bort öglor och pilar. Finns det en Eulerväg i  $\tilde{G}$ ?

(2p)

c) Betrakta den fullständiga bipratita grafen  $K_{4,5}$ . Hur många kanter finns det i grafen?

(2p)

### Uppgift 4

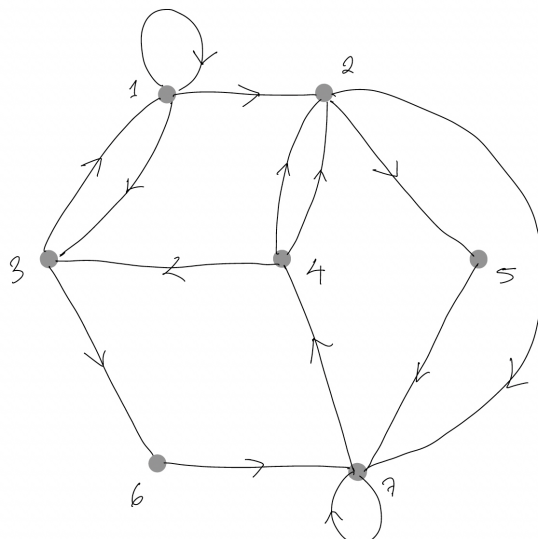
Ge minst två olika bevis för formeln:  $\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

(8p)

### Uppgift 5

a) Betrakta den Diofantiska ekvationen

$$19x + 49y = 2000.$$



Figur 1: Grafen  $G$  i Uppgift 3.

Bestäm (i) den allmänna lösningen, och (ii) alla lösningar där  $x, y \geq 0$ .

*Ledning:*  $49 \times 735 = 36015$  kan vara användbart.

(5p)

b) Betrakta kongruensen

$$38x \equiv 14 \pmod{98}.$$

Besämnt den minsta positiva lösningen.

(3p)

### Uppgift 6

För två mängder  $S_1$  och  $S_2$ , antag att  $R_1$  är en partiell ordning på  $S_1$  och  $R_2$  en partiell ordning på  $S_2$ . Definiera en ny relation  $R$  på  $S_1 \times S_2$  enligt att  $(a_1, a_2)R(b_1, b_2)$  om och endast om något av följande gäller:

- i)  $a_1 \neq b_1$  och  $a_1 R_1 b_1$ , eller
- ii)  $a_1 = b_1$  och  $a_2 R_2 b_2$ .

Visa att  $R$  är en partiell ordning på  $S_1 \times S_2$ .

(7p)

### Uppgift 7

Fibonacci-talen syftar till talföljden  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  definierad enligt  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 1$ , och

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

- a) Visa att två efterföljande Fibonaccital är relativt prima.
- b) Bestäm vilka Fibonaccital som är jämna; delbara med 3; delbara med 5.

(8p)

Lycka till!