

MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
TMV200 – Diskret matematik

Tentamen: 2022-04-12, 14.00–18.00

Telefonvakt: Christian Johansson, 031-772 5325

Hjälpmedel: Inga

Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt

Observera: Beräkningar och motiveringar ska redovisas.

Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

1. Avgör om följande argument är giltiga eller ej:

(a)

$$\begin{array}{c} p \rightarrow (q \wedge r) \\ q \rightarrow (\neg r) \\ \hline r \vee p \\ q \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{c} p \rightarrow (q \vee r) \\ (\neg q) \rightarrow (\neg r) \\ \hline r \vee p \\ q \end{array}$$

Om ett argument är giltigt, förklara varför. Om det inte är giltigt, ge ett motexempel.

(6p)

2. Definiera en talföljd $a_0, a_1, a_2, \dots$ rekursivt enligt

$$\begin{cases} a_0 = 1; \\ a_1 = 2; \\ a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Beräkna a_2 , a_3 och a_4 .

(2p)

(b) Gissa en allmän formel för a_n och bevisa den.

(3p)

(c) Om a_1 hade varit lika med ett reellt tal $c > 0$ istället, vad hade den allmänna formeln blivit? Endast svar räcker, inget bevis krävs.

(1p)

3. (a) Definiera vad är ett träd inom grafteorin, och rita ett träd med 5 noder.

(2p)

(b) Låt G vara ett träd med n noder. Hur många kanter har G ? Endast svar räcker, bevis krävs inte.

(1p)

(c) Låt G vara ett träd med n noder. Antag att G inte har några noder med gradtal 2. Visa att G har minst $(n+2)/2$ noder med gradtal 1.

(4p)

Var god vänd!

4. På ett bord ligger 10 kort, som har en bokstav på ena sidan och en siffra på andra sidan. Du ser just nu A, 4, Q, 8, 9, Y, M, Z, 2, 3.

(a) Betrakta påståendena "Om ett kort har en vokal på ena sidan så har den ett primtal på andra sidan", och "Det finns ett kort med ett jämnt tal på ena sidan och en vokal på andra sidan". Skriv dem på predikatlogisk form (glöm inte att definiera ett lämpligt universum). (3p)

(b) Vilka kort behöver du vända på för att kontrollera om första påståendet är sant? Vilka kort behöver du vända på för att kontrollera om andra påståendet är sant? Motivera dina svar. (3p)

5. (a) Låt X vara en mängd. Om M är en annan mängd och $f : X \rightarrow M$ är en funktion, så definierar vi en relation $\sim_f$ på X genom att säga att $x \sim_f y$ om och endast om $f(x) = f(y)$ (för $x, y \in X$). Visa att $\sim_f$ är en ekvivalensrelation. (3p)

(b) Låt nu $\sim$ vara en godtycklig ekvivalensrelation på X . Visa att det finns en mängd M och en surjektiv funktion $f : X \rightarrow M$ så att $\sim$ är lika med $\sim_f$. (Du kan anta att X är ändlig om det hjälper, men det är inte nödvändigt). (3p)

6. (a) Primtalsfaktorisera 4325 och beräkna $\Phi(4325)$. (3p)

(b) Bestäm alla heltalslösningar till den diofantiska ekvationen

$$51x + 39y = 18.$$

(3p)

7. Bestäm all heltalslösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^3 \equiv 4 & (5) \\ 3x \equiv 7 & (11). \end{cases}$$

(6p)

8. I den här uppgiften skall alla svar skrivas som explicita tal (i bas 10). Vi har fem vanliga sexsidiga tärningar som är identiska men urskiljbara. Om dessa kastas samtidigt finns 6^5 olika utfall (enligt multiplikationsprincipen).

(a) Hur många av dessa utfall ger en kåk, det vill säga tre av tärningarna visar en viss siffra x och de två övriga tärningarna visar en annan siffra y ? (3p)

(b) I hur många av de 6^5 utfallen är summan av siffrorna på de fem tärningarna lika med 9? (4p)

Lycka till!
Christian

Lösningar:

1. (a) Argumentet är ogiltigt: Om p och q är falska och r är sann, så blir hypoteserna sanna men slutsatsen falsk.

(b) Argumentet är giltigt: Antag att hypoteserna är sanna men slutsatsen sann. Då är q falsk, så $\neg q$ sann. Då $(\neg q) \rightarrow (\neg r)$ också är sann måste r vara falsk, så eftersom $r \vee p$ är sann måste p vara sann. Eftersom $p \rightarrow (q \vee r)$ är sann måste $q \vee r$ vara sann, men både q och r skulle vara falska, vilket ger en motsägelse.

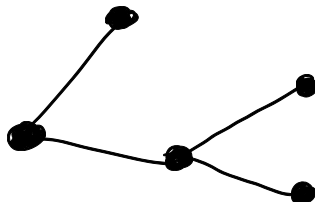
2. (a) Den rekursiva formeln ger $a_n = a_{n-1}^2/a_{n-2}$. Därmed får vi $a_2 = a_1^2/a_0 = 2^2/1 = 4$, $a_3 = a_2^2/a_1 = 16/2 = 8$ och $a_4 = a_3^2/a_2 = 64/4 = 16$.

(b) Baserat på (a) gissar vi att $a_n = 2^n$. Vi bevisar formeln med induktion. Basfallen $n = 0$ och $n = 1$ är korrekta, ty $a_0 = 1 = 2^0$ och $a_1 = 2 = 2^1$. Antag nu att $n \geq 2$ och att $a_{n-1} = 2^{n-1}$ och $a_{n-2} = 2^{n-2}$. Då är

$$a_n = a_{n-1}^2/a_{n-2} = 2^{2n-2}/2^{n-2} = 2^n,$$

vilken visar induktionssteget. Enligt induktionsprincipen är därmed $a_n = 2^n$ för alla heltal $n \geq 0$.

3. (a) Ett träd är en graf som är sammanhängande och inte har några cykler. Ett träd med fem noder:



(b) Ett träd med n noder har $n - 1$ kanter.

(c) Låt $v_1, \dots, v_n$ vara noderna i G och låt d_i vara gradtalet för v_i . Antag att det finns exakt k noder med gradtal 1, och att vi numrerat noderna så dessa är $v_1, \dots, v_k$. Enligt ett resultat från kursen är

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1) = 2n-2,$$

eftersom G har $n - 1$ kanter. Då $d_1 = \dots = d_k = 1$ kan vi skriva

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^k d_i + \sum_{i=k+1}^n d_i = k + \sum_{i=k+1}^n d_i.$$

Eftersom G inte har några noder med gradtal 2 (enligt antagande) så är $d_i \geq 3$ för $i = k+1, \dots, n$, så

$$\sum_{i=k+1}^n d_i \geq \sum_{i=k+1}^n 3 = 3(n-k) = 3n - 3k.$$

Alltså är

$$2n - 2 = \sum_{i=1}^n d_i = k + \sum_{i=k+1}^n d_i \geq k + (3n - 3k) = 3n - 2k.$$

Arrangerar vi om det får vi

$$2k \geq n + 2,$$

det vill säga $k \geq (n + 2)/2$.

4. (a) Universum är alla kort på bordet. Definiera predikaten $V(x)$, $P(x)$ och $J(x)$ enligt följande:

$V(x)$: Bokstaven på x är en vokal;

$P(x)$: Siffran på x är ett primtal;

$J(x)$: Siffran på x är jämn.

Då kan vi skriva första påståendet som

$$\forall x : V(x) \rightarrow P(x)$$

och andra påståendet som

$$\exists x : J(x) \wedge V(x).$$

(b) För att kontrollera och första påståendet är sant behöver vi vända på korten som visar A, 4, 8, 9, och Y (dvs alla kort som antingen visar en vokal eller ett tal som inte är ett primtal). För att kontrollera om andra påståendet är sant behöver vi vända på korten som visar A, 4, 8, Y och 2 (dvs alla kort som antingen visar en vokal eller ett jämnt tal).

5. (a) Vi visar att $\sim_f$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv:

- Reflexiv: $x \sim_f x$ eftersom $f(x) = f(x)$.
- Symmetrisk: Om $x \sim_f y$ så är $f(x) = f(y)$. Därmed är $f(y) = f(x)$, så $y \sim_f x$.
- Transitiv: Antag att $x \sim_f y$ och $y \sim_f z$, dvs $f(x) = f(y)$ och $f(y) = f(z)$. Då är $f(x) = f(z)$, så $x \sim_f z$.

(b) Låt M vara mängden av alla ekvivalensklasser av $\sim$ på X , och låt $f : X \rightarrow M$ vara funktionen som sänder $x \in X$ till ekvivalensklassen för x . Då är $\sim = \sim_f$, och f är surjektiv.

6. (a) Vi har $4325 = 5^2 \cdot 173$. Då får vi att

$$\Phi(4325) = \Phi(5^2) \cdot \Phi(173) = (5^2 - 5) \cdot 172 = 20 \cdot 172 = 3440.$$

(b) Vi har $\text{sgd}(51, 39) = 3$, vilket delar 18, så ekvationen har lösningarna och vi delar 3 för att förenkla den. Vi får då $17x + 13y = 6$. Vi har $\text{sgd}(17, 13) = 1$, och med Euklides algoritm får vi att $4 \cdot 13 - 3 \cdot 17 = 1$, och därmed är

$$17 \cdot (-18) + 13 \cdot 24 = 6.$$

Samtliga lösningar ges då av $x = -18 + 13n$, $y = 24 - 17n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. Med trial and error ser vi att $x^3 \equiv 4 \pmod{5}$ endast har lösningen $x \equiv 4 \pmod{5}$. Därmed är $x = 5y + 4$ för något $y \in \mathbb{Z}$. Insättning i den andra ekvationen ger

$$3x = 3(5y + 4) = 15y + 12 \equiv 4y + 1 \equiv 7 \pmod{11},$$

vilket är ekvivalent med $4y \equiv 6 \pmod{11}$. Inversen till 4 modulo 11 är 3, så om vi multiplicerar ekvationen med 3 får vi $y \equiv 18 \equiv 7 \pmod{11}$, dvs $y = 11n + 7$. Vi får då

$$x = 5y + 4 = 5(11n + 7) + 4 = 55n + 39, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

8. (a) Vi har 6 val för siffran x och sedan 5 val för siffran y . Slutligen kan vi välja vilka två av de fem tärningarna som skall visa y på $\binom{5}{2} = 10$ sätt. Vi får alltså $6 \cdot 5 \cdot 10 = 300$ utfall som ger en kåk.

(b) Om vi bortser från ordningen så kan summan 9 fås på följande sätt:

1. $9 = 1 + 1 + 1 + 1 + 5$: Det fås för 5 olika utfall (5 sätt att välja vilken tärning som skall visa 5).
2. $9 = 1 + 1 + 1 + 2 + 4$: Det fås för $20 = 5 \cdot 4$ olika utfall (5 sätt att välja vilken tärning som skall visa 4, sen 4 val för vilken tärning som skall visa 2).
3. $9 = 1 + 1 + 1 + 3 + 3$: Det fås för $\binom{5}{2} = 10$ olika utfall (antalet sätt att välja vilka två tärningar som skall visa treor).
4. $9 = 1 + 1 + 2 + 2 + 3$: Det fås för $30 = 3 \cdot 10$ olika utfall (10 sätt att välja de två tärningarna som skall visa tvåor, sen 3 sätt att välja tärningen som skall visa en trea).
5. $9 = 1 + 2 + 2 + 2 + 2$: Det fås för 5 olika utfall (antalet val för vilken tärning som skall visa ettan).

Totalt får vi $5 + 20 + 10 + 30 + 5 = 70$ utfall med summa 9.