

MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
TMV200 – Diskret matematik

Tentamen: 2022-08-26, 14.00–18.00

Telefonvakt: Christian Johansson, 031-772 5325

Hjälpmedel: Inga

Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt

Observera: Beräkningar och motiveringar ska redovisas.

Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

1. Avgör om följande argument är giltigt eller ej:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow (\neg t) \\ \neg(p \wedge t) \rightarrow (q \vee (\neg s)) \\ r \vee s \\ r \rightarrow (\neg q) \end{array}}{s}$$

Om argumentet är giltigt, förklara varför. Om det inte är giltigt, ge ett motexempel. (6p)

2. Visa att

$$\sum_{k=0}^n 4(k^3 + k) + 6k^2 + 1 = (n+1)^4$$

för all heltal $n \geq 0$. (6p)

3. (a) Rita en graf G_1 med fem noder och gradtal 1, 2, 2, 3 och 4. Har G_1 en Eulerväg? (2p)

(b) Låt G_2 vara den riktade grafen med grannmatris

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rita G_2 och rita ut en riktad cykel i G_2 . (2p)

(c) Låt G_3 vara den vanliga graf som man får om glömmer riktningarna på kanterna i G_2 . Hur många inducerade delgrafer med mer än en nod finns det i G_3 som är träd? (3p)

Var god vänd!

4. Låt X och Y vara två ändliga mängder.

(a) Betrakta påståendena “Alla funktioner från X till Y är surjektiva”, och “Somliga funktioner från X till Y är inte injektiva”. Skriv dem på predikatlogisk form (glöm inte att definiera ett lämpligt universum). (3p)

(b) Under vilka antaganden på X och Y är det första påståendet ovan sant? Under vilka antaganden på X och Y är det andra påståendet ovan sant? Du måste motivera dina svar för att kunna få poäng. (3p)

5. Definiera en relation $\sim$ på de positiva heltalen $\mathbb{Z}_+$ genom att säga att $a \sim b$ om och endast om $a^2 + b^2 = c^2$ för något $c \in \mathbb{Z}_+$.

(a) Är $\sim$ reflexiv? Symmetrisk? Transitiv? (3p)

(b) Visa att $1 \not\sim c$ för alla $c \in \mathbb{Z}_+$, samt hitta det par av positiva heltal a och b med $a \sim b$ så att $a + b$ är minimalt. (3p)

6. (a) Primtalsfaktorisera 6468 och beräkna $\Phi(6468)$. (3p)

(b) Vilka är de två sista siffrorna i 7^{123} ? (4p)

7. Bestäm alla heltalslösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + x + 2 \equiv 0 & (7) \\ 5x \equiv 1 & (13). \end{cases} \quad (6p)$$

8. I den här uppgiften skall alla svar skrivas som explicita tal (i bas 10). Ett fotbollslag har 20 spelare med sig till en match: tre målvakter, sex backar, sex mittfältare och fem anfallare.

(a) Tränaren skall ta ut en målvakt, fyra backar, tre mittfältare och tre anfallare till startelvan. På hur många sätt kan det göras? (3p)

(b) I andra halvlek byter tränaren fem spelare (samtidigt). När bytena är klara är samma målvakt på plan, samt tre backar, fyra mittfältare och tre anfallare. På hur många sätt kan bytena ha gjorts? (3p)

Lycka till!
Christian

Lösningsförslag (lite kortfattade):

1. Vi gör ett motsägelsebevis. Antag att hypoteserna är sanna men slutsatsen är falsk. Då är s falsk (det är slutsatsen) och eftersom $r \vee s$ är sann (tredje hypotesen) är r sann. Eftersom $r \rightarrow \neg q$ är sann (fjärde hypotesen) och r är sann är q falsk. Vi ser då $q \vee \neg s$ är sann, så andra hypotesen är sann oavsett sanningsvärdena på p och t . Alltså kan vi (exempelvis) låta p vara falsk och t falsk så blir första hypotesen också sann, och vi har konstruerat ett motexempel. Alltså är argumentet ogiltigt.

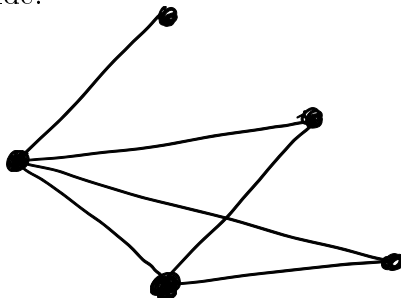
2. Vi gör ett induktionsbevis. Som basfall tar vi $n = 0$; då ser vi att vänsterledet blir $4(0^3 + 0) + 6 \cdot 0^2 + 1 = 1$ och högerledet blir $(0 + 1)^4 = 1$, så basfallet är ok.

Induktionssteget: Antag nu att $n \geq 1$ samt att $\sum_{k=0}^{n-1} 4(k^3 + k) + 6k^2 + 1 = n^4$. Vi vill visa att $\sum_{k=0}^n 4(k^3 + k) + 6k^2 + 1 = (n + 1)^4$. Vi får

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 4(k^3 + k) + 6k^2 + 1 &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} 4(k^3 + k) + 6k^2 + 1 \right) + 4(n^3 + n) + 6n^2 + 1 = \\ &= n^4 + 4(n^3 + n) + 6n^2 + 1 = (n + 1)^4, \end{aligned}$$

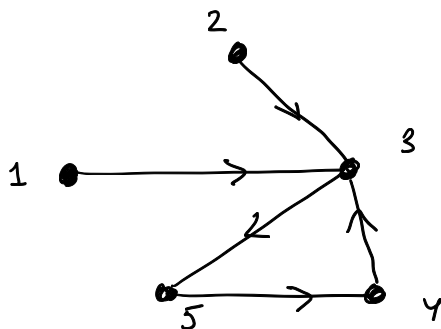
där vi använt induktionsantagandet i det andra steget och binomialsatsen i det tredje steget. Det avslutar induktionssteget, och formeln är därmed bevisad med induktion.

3. (a) G_1 kan se ut enligt följande:



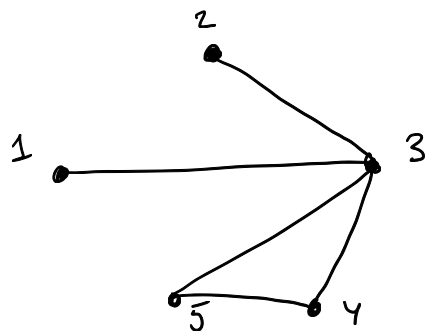
Den har en Eulerväg eftersom den har exakt två noder med udda gradtal.

(b) G_2 ser ut så här:



En riktad cykel ges av 3, 5, 4, 3.

(c) G_3 ser ut så här:



Den har fem inducerad delgrafer med 2 noder som är träd (givna genom att välja nodmängderna $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$), fem inducerad delgrafer med 3 noder som är träd (givna genom att välja nodmängderna $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$), samt två delgrafer med 4 noder som är träd (givna genom att välja nodmängderna $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$). Totalt får vi 12 inducerade delgrafer med mer än en nod som är träd.

4. (a) Låt universum U vara mängden av alla funktioner från X till Y , och låt $S(f)$ och $I(f)$ vara predikaten “ f är surjektiv” respektive “ f är injektiv”. Vi kan skriva det första påståendet som

$$\forall f \in U : S(f)$$

och det andra påståendet som

$$\exists f \in U : \neg I(f).$$

(b) Det första påståendet är sant när $X \neq \emptyset$ och $|Y| = 1$ (det finns bara en funktion, som skickar allt till det enda elementet i Y), samt när $Y = \emptyset$ (om $X \neq \emptyset$ finns det då inga funktioner $X \rightarrow Y$, och om $X = \emptyset$ finns bara den tomma funktionen, som är surjektiv när målmängden är $\emptyset$). Det andra påståendet är sant när $|X| > 1$ och $Y \neq \emptyset$ (om X har mer än ett element kan skicka samtliga element i X till samma element i Y och få en funktion som inte är injektiv).

5. (a) $\sim$ är inte reflexiv; exempelvis är $1 \not\sim 1$ eftersom $1^2 + 1^2 = 2$ inte är en kvadrat. Däremot är $\sim$ symmetrisk eftersom $a^2 + b^2 = b^2 + a^2$, så om den ena är en kvadrat är den andra det också. Slutligen är $\sim$ inte transitiv – vi har $3 \sim 4$ och $4 \sim 3$ men $3 \not\sim 3$.

(b) Om $1 \sim c$ så skall $1 + c^2$ vara en kvadrat. Men vi har $c^2 < 1 + c^2 < (c+1)^2$ och det finns inga kvadrater mellan c^2 och $(c+1)^2$, så $1 + c^2$ kan inte vara en kvadrat. Alltså är $1 \not\sim c$ för alla $c \in \mathbb{Z}_+$. Slutligen är $(a, b) = (3, 4)$ det par med $a \sim b$ och $a + b$ minimalt.

6. (a) Vi har $6468 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11$, så

$$\Phi(6468) = \Phi(2^2)\Phi(3)\Phi(7^2)\Phi(11) = (4-2)(3-1)(49-7)(11-1) = 1680.$$

(b) Vi beräknar 7^{123} modulo 100. Vi har $\text{sgd}(7, 100) = 1$ samt $\Phi(100) = \Phi(2^2)\Phi(5^2) = (4-2)(25-5) = 40$, så Euler sats säger att $7^{40} \equiv 1 \pmod{100}$. Därmed får vi

$$7^{123} = 7^{40 \cdot 3 + 3} = (7^{40})^3 \cdot 7^3 \equiv 7^3 \equiv 343 \equiv 43 \pmod{100}.$$

Alltså är 4 och 3 de två sista siffrorna i 7^{123} (3 sist, 4 näst sist).

7. Med trial and error får vi att $x^2 + x + 2 \equiv 0 \pmod{7}$ endast har lösningen $x \equiv 3 \pmod{7}$. Därmed är $x = 3 + 7y$ för $y \in \mathbb{Z}$. Insättning i den andra ekvationen ger

$$5(3 + 7y) = 15 + 35y \equiv 1 \pmod{13},$$

vilket vi kan förenkla till $9y \equiv -1 \pmod{13}$. Inversen till 9 modulo 13 är 3 (kan hittas med Euklides algoritmen) så vi får $y \equiv -3 \equiv 10 \pmod{13}$, dvs $y = 10 + 13n$, $n \in \mathbb{Z}$. Alltså får vi lösningarna

$$x = 3 + 7(10 + 13n) = 73 + 91n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

8. (a) Vi har 3 val för målvakten, $\binom{6}{4} = 15$ val för backarna, $\binom{6}{3} = 20$ val för mittfältarna och $\binom{5}{3} = 10$ val för anfallarna. Så det blir $3 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 10 = 9000$ olika möjligheter.

(b) Det finns 2 backar, 3 mittfältare och 2 anfallare på bänken (målvakterna kan vi ignorera). Vi har sex olika fall för hur vi kan byta in och ut:

Fall 1: 2 backar in, 3 mittfältare in, 0 anfallare in, 3 backar ut, 2 mittfältare ut och 0 anfallare ut. Skriver det som 2+3+0 in, 3+2+0 ut. Kan göras på

$$\binom{2}{2} \binom{3}{3} \binom{2}{0} \binom{4}{3} \binom{3}{2} \binom{3}{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12 \text{ sätt.}$$

Fall 2: 2+2+1 in, 3+1+1 ut. Kan göras på

$$\binom{2}{2} \binom{3}{2} \binom{2}{1} \binom{4}{3} \binom{3}{1} \binom{3}{1} = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 216 \text{ sätt.}$$

Fall 3: 2+1+2 in, 3+0+2 ut. Kan göras på

$$\binom{2}{2} \binom{3}{1} \binom{2}{2} \binom{4}{3} \binom{3}{0} \binom{3}{2} = 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 = 36 \text{ sätt.}$$

Fall 4: 1+3+1 in, 2+2+1 ut. Kan göras på

$$\binom{2}{1} \binom{3}{3} \binom{2}{1} \binom{4}{2} \binom{3}{2} \binom{3}{1} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 = 216 \text{ sätt.}$$

Fall 5: 1+2+2 in, 2+1+2 ut. Kan göras på

$$\binom{2}{1} \binom{3}{2} \binom{2}{2} \binom{4}{2} \binom{3}{1} \binom{3}{2} = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 = 324 \text{ sätt.}$$

Fall 6: 0+3+2 in, 1+2+2 ut. Kan göras på

$$\binom{2}{0} \binom{3}{3} \binom{2}{2} \binom{4}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 \text{ sätt.}$$

Totalt får vi $12 + 216 + 36 + 216 + 324 + 36 = 840$ sätt.